Fundación BBVA

Documentos de Trabajo
3

2005

Gemma Abío Roig
Concepció Patxot Cardoner

Sistemas de pensiones y fecundidad

Un enfoque de generaciones solapadas

Fundación BBVA

Sistemas de pensiones y fecundidad

Un enfoque de generaciones solapadas

Gemma Abío Roig
Concepció Patxot Cardoner

UNIVERSIDAD DE BARCELONA

Resumen

El problema de la viabilidad futura de los sistemas de pensiones de reparto es un tema candente en los países de la OCDE. Los cambios demográficos, que incluyen una baja natalidad y un envejecimiento de la población, están directamente relacionados con la crisis del sistema de pensiones. Por ello, se plantea la necesidad de estudiar la tasa de fecundidad y los factores que la condicionan a la hora de abordar las posibles reformas del plan de pensiones. En el presente trabajo se exponen dos modelos: en el primero se analiza el coste económico de los hijos, y en el segundo, el coste en términos de tiempo. De todo ello se deduce la idoneidad de vincular las pensiones al número de hijos.

Palabras clave

Pensión, coste, trabajo, tasa de crecimiento, reparto, vinculación demográfica.

Abstract

The problem of the future viability of pension systems is a hot topic in the OECD countries. Demographic changes, which include a low birth rate and an ageing population, are directly related to the pension system crisis. Hence the need to study the fertility rate and the factors involved before implementing any possible reform in pension plans. This paper presents two models: one which analyzes the economic burden of having children and another which looks at the cost in terms of time. It concludes that it is reasonable to link pensions to the number of children.

Key words

Pension, cost, work, growth rate, share, demographic linking.

La serie Documentos de Trabajo, así como información sobre otras publicaciones de la Fundación BBVA, pueden consultarse en: **http://www.fbbva.es**

Sistemas de pensiones y fecundidad:
Un enfoque de generaciones solapadas

EDITA
© Fundación BBVA. Plaza de San Nicolás, 4. 48005 Bilbao

DISEÑO DE CUBIERTA
Roberto Turégano

DEPÓSITO LEGAL: M-35.295-2005
IMPRIME: Sociedad Anónima de Fotocomposición

La serie Documentos de Trabajo de la Fundación BBVA está elaborada con papel 100% reciclado, fabricado a partir de fibras celulósicas recuperadas (papel usado) y no de celulosa virgen, cumpliendo los estándares medioambientales exigidos por la actual legislación.

El proceso de producción de este papel se ha realizado conforme a las regulaciones y leyes medioambientales europeas y ha merecido los distintivos Nordic Swan y Ángel Azul.

Í N D I C E

Introducción

UNO de los temas más debatidos en la agenda política de la mayoría de los países de la OCDE en la última década ha sido el problema de la viabilidad futura de los sistemas de pensiones de reparto. En el caso de España, este debate dio lugar, en 1995, al Pacto de Toledo, que surgió con el objetivo de mejorar la situación financiera del sistema público de pensiones [1]. En 1997, como consecuencia de este pacto, el gobierno español aprobó una Ley de Reforma de las Pensiones [2]. Sin embargo, varios estudios muestran que dicha reforma fue insuficiente para solucionar el problema del futuro de la Seguridad Social [3].

Durante la segunda mitad de la década de los noventa, el ciclo económico de la economía española atravesó, al igual que en otros países europeos, una fase expansiva. La mejora resultante en el mercado de trabajo, con una reducción sustancial de las tasas de paro, ha aliviado la preocupación sobre el futuro de las pensiones. Adicionalmente, el hecho de que, al contrario de lo que predecía la mayoría de los estudios más recientes, haya aparecido un superávit en el presupuesto del sistema contributivo de la Seguridad Social en los dos últimos años, ha permitido iniciar la creación de un fondo de reserva para ser utilizado cuando las circunstancias futuras adversas lo requieran.

En definitiva, a las puertas del nuevo siglo, esto ha contribuido a una relajación de la preocupación política hacia el futuro de las finanzas del sistema de pensiones públicas. No obstante, estudios recientes insisten en que la mejora de la situación del sistema de pensiones en el corto plazo no implica que se haya resuelto la tan anunciada crisis de las pensiones en el largo plazo. Herce y Alonso (2000), así como Gil y Patxot

1. Algunos estudios que muestran la insostenibilidad de las finanzas de la Seguridad Social española son Fundación BBV (1997), Gimeno y Licandro (1999), Monasterio, Sánchez y Blanco (1996), MTSS (1995) y Piñera (1996).

2. *Ley 24/1997 de Consolidación y Racionalización del Sistema de Seguridad Social.*

3. Véase Herce y Alonso (1998), Monasterio *et al.* (2000), Abío *et al.* (1999) y Bonin *et al.* (1999).

(2000), intentan evaluar los efectos de la citada Ley de Reforma de las Pensiones española de 1997 teniendo en cuenta los cambios que se han sucedido recientemente en el mercado de trabajo, y muestran que la situación de las finanzas de la Seguridad Social española es todavía insostenible a largo plazo. Estos autores coinciden en que la situación favorable de la economía española a finales de los noventa solamente ha modificado el panorama en el corto plazo, y alertan sobre los problemas que aparecerán en el presupuesto de la Seguridad Social alrededor de la década de 2030 si no se llevan a cabo medidas severas al respecto. En efecto, una mejora en las tasas de empleo y de actividad laboral aumenta las aportaciones en forma de cotizaciones de la población activa, pero va a ser el notable aumento de la tasa de dependencia el responsable del colapso del sistema dentro de aproximadamente tres décadas, aunque se esperen pequeños superávits en los próximos 15 o 20 años. Por tanto, para asegurar la solvencia financiera del sistema público de pensiones en el futuro, parece inevitable afrontar una profunda reforma del sistema.

Los cambios demográficos que han precedido a la crisis de la Seguridad Social parecen ser la causa de la cuestión que analizamos. La reducción de la natalidad, junto con el aumento de la esperanza de vida, ha producido un envejecimiento de la población, causa de la crisis del sistema de pensiones de reparto. La predicción de que la tasa de dependencia continúe aumentando en los próximos años ha motivado numerosas propuestas para pasar a un sistema de capitalización. En este trabajo, analizamos la raíz última de los problemas financieros del sistema de reparto actual y proponemos una solución a dichos problemas que no implique cambiar la financiación vía reparto del sistema.

Esencialmente, el origen de los problemas financieros de los sistemas de pensiones de reparto se encuentra en la ausencia de una relación formal, en la fórmula de cálculo de las pensiones, entre la tasa de fecundidad y los beneficios que se reciben en concepto de pensiones, cuando en realidad esta relación existe en términos macroeconómicos. Por tanto, una reforma intuitiva del sistema de pensiones consistiría en ligar, de alguna manera, las pensiones al número de hijos. Parece interesante estudiar esta política por diversos motivos. Por un lado, esta propuesta conseguiría automáticamente el equilibrio financiero del sistema, eliminando su dependencia demográfica. Por otro lado, esta política podría restaurar la optimalidad de la economía, aumentando así el bienestar general, a través de su influencia en la tasa de fecundidad, que a menudo no se tiene en cuenta.

La mayoría de las reformas que se han sugerido ante el envejecimiento de la población implican un coste en términos de bienestar para algunas generaciones [4]. En dichos estudios, se suele considerar el número de hijos como una variable exógena, cuando esta decisión individual puede estar influenciada por las políticas de pensiones vigentes. Sin embargo, en este contexto nos parece relevante endogeneizar el número de hijos [5]. En primer lugar, si el número de hijos es una decisión individual, la presencia de un sistema de pensiones introduce una externalidad: los agentes no tienen en cuenta el efecto positivo de su elección del número de hijos en las pensiones futuras. De hecho, dado que los hijos acabarán siendo contribuyentes del sistema, tenerlos y educarlos es una forma de aportar contribuciones a la Seguridad Social. Por tanto, parece importante estudiar la relación entre las pensiones y la fecundidad. Según la llamada *hipótesis de la Seguridad Social,* la introducción de un sistema de pensiones obligatorio podría haber contribuido notablemente a la caída de la natalidad que se ha observado en muchos países desarrollados, puesto que tal sistema sustituye las transferencias privadas de hijos a padres [6]. Como veremos en este trabajo, puede que existan otras influencias del sistema de pensiones sobre la tasa de crecimiento de la población.

En segundo lugar, la elección del número de hijos tiene efectos de equilibrio general en la economía. Literatura reciente sobre transferencias intergeneracionales muestra que es necesaria la utilización de modelos con crecimiento de la población endógeno para analizar políticas que lleven a la economía competitiva hacia el óptimo social. De hecho, la consecución del óptimo social requiere la corrección de dos fuentes potenciales de ineficiencias: se trata de conseguir no sólo el *stock* de capital óptimo sino también la tasa de crecimiento óptima de la población. Un posible instrumento para lograr estos objetivos es una transferencia intergeneracional, como por ejemplo una pensión, que esté ligada al número de hijos.

4. Véase Sinn (2000).

5. En realidad, deberíamos llevar a cabo un análisis más general sobre la determinación de las decisiones humanas para referirnos a esta cuestión de una forma adecuada. En este trabajo, nos centramos estrictamente en los incentivos económicos que afectan a las decisiones sobre fecundidad, dejando a un lado otros factores que influyen en esta decisión.

6. Véase Cigno (1993) y Wigger (1999). Entre otros, estos autores argumentan que si las familias tienen hijos por el motivo inversión, la introducción de un sistema de pensiones de reparto habría tenido un efecto de *free-riding*, reduciendo la tasa de fecundidad.

Algunos modelos teóricos con crecimiento de la población endógeno han estudiado la capacidad de un sistema de Seguridad Social de reparto para solucionar la crisis de las pensiones (Bental, 1989 y Eckstein y Wolpin, 1985), pero ninguno de estos modelos es capaz de explicar la caída de la natalidad observada desde los años sesenta. El modelo teórico desarrollado en la segunda parte de este trabajo es capaz de explicar y reproducir la transición demográfica que desencadenó los problemas financieros de los sistemas de pensiones de reparto. Aparte de la citada *hipótesis de la Seguridad Social,* hay otras dos razones económicas que han sido utilizadas para explicar la transición demográfica. Una se refiere a la sustitución de cantidad por calidad de los hijos a medida que avanza el desarrollo económico. Becker, Murphy y Tamura (1990) y Galor y Weil (2000) hacen uso de este argumento en un modelo de crecimiento endógeno. El otro motivo que explica la caída de la natalidad es el aumento del coste de oportunidad de tener hijos que han experimentado las mujeres en los países desarrollados. Este argumento es atractivo porque, además de explicar la transición demográfica, también permite replicar el aumento observado de la participación femenina en el mercado de trabajo. Por este motivo, siguiendo a Galor y Weil (1996), nos centramos en este último argumento.

En la primera parte del trabajo, partimos de un modelo simple con crecimiento de la población endógeno en el cual el coste de tener un hijo es fijo. Este modelo, que no produce ninguna transición demográfica, nos ayudará a entender cuáles son los efectos de un sistema de Seguridad Social de reparto en la economía, y en particular en las decisiones de los individuos. Veremos que, redefiniendo el sistema en la forma en que hemos propuesto anteriormente, es decir, ligando las pensiones al número de hijos de los individuos, los problemas financieros del sistema desaparecen y, además, se restaura la optimalidad de la economía. En esta parte, también introducimos agentes heterogéneos para ver cómo afecta la política propuesta a individuos que difieren en sus preferencias hacia los hijos. Este análisis proporciona una guía interesante para derivar implicaciones de política económica en presencia de heterogeneidad intrageneracional en cuanto a fecundidad.

En la segunda parte del trabajo, desarrollamos un modelo más complejo. Dicho modelo produce una transición demográfica similar a la experimentada en los países de la OCDE. El motor de la transición es, como hemos indicado, el aumento de la participación femenina en el mercado de trabajo. En este modelo, además, suponemos que los hijos son costosos en términos de tiempo. De nuevo constatamos que una política que liga las pensiones al número de hijos es el *único* instrumento que se requiere para alcanzar el capital y la tasa de crecimiento de la población óptimos. Sin embargo, el hecho de que los niños tengan un coste en términos de tiempo introduce una diferencia en la política óptima, puesto que las tasas de cotización pueden distorsionar la oferta de trabajo femenina, lo que reduciría el coste de oportunidad de los hijos y por tanto induciría a un aumento de la natalidad.

Por otra parte, comparamos la transferencia *óptima* de la Seguridad Social al sistema actual de pensiones, en lo referente a sus efectos sobre la tasa de crecimiento de la población. Nuestro análisis muestra que, en algunos casos, aunque la tasa de fecundidad observada en una economía puramente competitiva sea inferior a la óptima, puede que todavía sea mayor —acercándose más a la óptima— si introducimos un sistema de reparto similar al que existe hoy día en diversos países. Por tanto, se pone de relieve otra razón para mantener un sistema de pensiones de reparto en el contexto del debate sobre la reforma de la Seguridad Social.

Parte I: Crecimiento óptimo de la población y reforma del sistema de pensiones con agentes heterogéneos

EL papel de las transferencias intergeneracionales en los modelos de generaciones solapadas fue analizado por primera vez en un entorno de fecundidad exógena. En dicho entorno, se comprobó que el equilibrio competitivo difiere generalmente del óptimo social o *first best*. Para alcanzar el nivel óptimo de capital por trabajador, que viene definido por la regla de oro, puede emplearse una diversidad de instrumentos.

Samuelson (1975) derivó la tasa óptima de crecimiento de la población en el modelo de generaciones solapadas de Diamond de dos periodos, y mostró que, aunque se diera la regla de oro, la economía no alcanzaría el *first best* mientras la tasa de crecimiento de la población fuera distinta de su valor óptimo. Por tanto, no hay sólo una, sino dos ineficiencias potenciales que deben corregirse en la economía de libre mercado: una es el *stock* de capital por trabajador y la otra es la tasa de crecimiento de la población. De hecho, Samuelson demostró que si la economía alcanzaba la tasa de crecimiento de la población óptima, automáticamente se cumplía también la regla de oro, coincidiendo el equilibrio competitivo con el óptimo social [1].

1. Se trata del conocido *teorema de la serendipidad*. Deardorff (1976) mostró que, en ciertas condiciones, la tasa de crecimiento óptima de la población de Samuelson determinaba de hecho el mínimo de la utilidad de los agentes. Véase también Michel y Pestieau (1993) y Jaeger (1989).

El hecho de que el equilibrio de libre mercado sea diferente del *first best* en los modelos de generaciones solapadas con población exógena es, después de todo, perfectamente razonable. Lo que sería sorprendente es que, dada una tasa de crecimiento de la población exógena, y por tanto, probablemente no óptima, se alcanzara el óptimo social. Obviamente, para analizar políticas que restauren la optimalidad en una economía de libre mercado se requiere un modelo con la tasa de crecimiento de la población endógena.

Empezaremos nuestro análisis con un modelo simple de generaciones solapadas de tres periodos con crecimiento de la población endógeno. Supondremos que a los individuos de este modelo les gustan los niños, de manera que el número de hijos aparecerá en la función de utilidad de los padres. Por otra parte, supondremos que la decisión de tener un hijo implica un coste fijo monetario. Nuestra propuesta de reforma del sistema de pensiones consistirá en ligar, en un sistema de reparto, las pensiones que recibe un individuo al número de hijos que ha tenido. Llevaremos a cabo un análisis teórico de la facultad de esta propuesta para restaurar la optimalidad de la economía competitiva, y veremos que una economía con un sistema de pensiones como el propuesto es óptima si el tipo de cotización se elige de manera adecuada. Además, esta política aísla el sistema de pensiones de las crisis debidas a las fluctuaciones demográficas.

Después de derivar el modelo con agentes homogéneos, introduciremos heterogeneidad en las preferencias de los individuos hacia los hijos. Supondremos que, mientras que a unos agentes les gustan los niños, a otros no, de forma que estos últimos sólo tendrán hijos por el motivo inversión. En este caso, la implementación de la política que proponemos también llevará a la consecución de la tasa de crecimiento óptima de la población así como al nivel óptimo de capital por trabajador, aunque se requerirán medidas adicionales para redistribuir el bienestar entre los agentes según la función de bienestar social que se haya elegido. Alternativamente, podría introducirse heterogeneidad con respecto a la capacidad para tener hijos, sin que esto tuviera efectos en los anteriores resultados.

En la siguiente sección, empezamos analizando las potenciales divergencias entre la economía de libre mercado y el óptimo social en nuestro modelo. En la sección 2 nos centramos en el caso de agentes homogéneos, y en la sección 3 en el caso de agentes heterogéneos.

1. Divergencias entre la economía de libre mercado y la solución óptima

PARTIMOS de un modelo de generaciones solapadas de tres periodos. Los agentes consumen c_t y d_{t+1} en los dos periodos de su vida adulta, y una cantidad fija de recursos e cuando son niños. La función de producción viene dada por $F(K_t, L_t)$, donde K_t es el *stock* de capital y L_t el *stock* de trabajo en el periodo t. En su forma intensiva, la función de producción se expresa como $f(k_t)$, con k_t indicando el *stock* de capital por trabajador. N_t es el tamaño de la población que está en el segundo periodo de su vida en t, que es igual a L_t.

La restricción de recursos de la economía en términos per cápita de la población trabajadora es:

$$f(k_t) + (1 - \delta)k_t = c_t + \frac{d_t}{n_t - 1} + en_t + k_{t+1}n_t \tag{1.1}$$

donde $n_t \equiv \dfrac{N_{t+1}}{N_t}$ es el número de hijos de la generación N_t [2], y δ es la tasa de depreciación del capital.

La ecuación (1.1) es la restricción a la que se enfrenta el planificador social. Nos dice que el total de la producción y del capital no depreciado en el periodo t se destinan al consumo (de las tres generaciones vivas en t) y a la inversión en capital para el siguiente periodo. Un examen más detenido de dicha ecuación nos ayudará a entender por qué la solución de equilibrio en la economía de libre mercado puede ser distinta de la solución óptima en este entorno.

2. La tasa de crecimiento de la población viene dada por $n_t - 1$.

Si la población está aumentando ($n_t > 1$ para todo t), ocurren tres cosas a nivel macroeconómico: 1) el consumo de los niños por trabajador resulta más caro, puesto que hay más niños que mantener; 2) la acumulación de capital para la siguiente generación también resulta más cara en términos por trabajador del periodo t —si quiere mantenerse el mismo nivel de capital por trabajador—, y 3) el consumo de los ancianos —por trabajador— resulta más barato. Obviamente, ocurriría lo contrario si la población decreciera ($n_t < 1$ para todo t). Dado que los agentes eligen el número de hijos que quieren tener, sus decisiones determinan la tasa de crecimiento de la población. La cuestión es si los agentes perciben los tres efectos que el número de hijos tiene sobre la economía, de forma que éstos son internalizados.

El primer efecto generalmente es tenido en cuenta a nivel microeconómico, dado que suelen ser los padres los que pagan el coste de mantener y educar a sus hijos. En ausencia de altruismo, no obstante, el individuo no tiene en cuenta los otros dos efectos [3]. Como consecuencia, hay dos divergencias entre la economía del planificador y la de libre mercado. Éstas son los efectos segundo y tercero, conocidos respectivamente como el *efecto de dilución del capital* y el *efecto de transferencias intergeneracionales* (Michel y Pestieau, 1993) [4].

3. Si se introdujera altruismo hacia delante (de padres a hijos) el segundo efecto sería internalizado, mientras que si se introdujera altruismo hacia atrás (de hijos a padres), se internalizaría el tercer efecto. Si incluyéramos ambos tipos de altruismo, el problema resultante del individuo no diferiría en absoluto del problema del planificador, y los tres efectos serían tenidos en cuenta por los agentes. Véase Nerlove, Razin y Sadka (1987, cap. 7).

4. Según este último efecto, el crecimiento de la población es deseable si hay transferencias intergeneracionales netas de los jóvenes a los más viejos, puesto que implica que hay un mayor número de trabajadores por anciano a mantener.

2. El modelo con agentes homogéneos

LAS preferencias de los individuos vienen representadas por la siguiente función:

$$u_t = u(c_t, d_{t+1}, n_t) \tag{2.1}$$

es decir, los agentes obtienen utilidad del consumo en los dos periodos de su vida adulta y del número de hijos que tienen. Suponemos que no hay altruismo, en el sentido de que los individuos no valoran la utilidad de sus hijos. Suponemos además que esta función es creciente y cóncava en cada uno de sus argumentos.

2.1. El planificador

A lo largo del trabajo, enfocaremos la optimalidad considerando un planificador benevolente que maximiza la utilidad de un agente representativo en el estado estacionario. El problema al que se enfrenta el planificador en esta economía consiste en maximizar la función de utilidad dada por la ecuación (2.1) en el estado estacionario, sujeta a la restricción de recursos de la ecuación (1.1) —sin subíndices temporales— respecto a *c, d, n* y *k.* Una solución interior está caracterizada por las siguientes Condiciones de Primer Orden (CPO):

$$\frac{u_c}{u_d} = n^* \tag{2.2}$$

$$\frac{u_n}{u_c} + \frac{d^*}{(n^*)^2} = e + k^* \tag{2.3}$$

$$f'(k^*) + 1 - \delta = n^* \tag{2.4}$$

junto con la ecuación (1.1), donde u_i representa la derivada de la función $u()$ respecto al argumento i, con $i = c, d, n$. Las condiciones de segundo orden se analizan en el apéndice.

2.2. La economía descentralizada

En esta sección descentralizamos el óptimo social. En el primer periodo de su vida, los agentes no toman decisiones económicas, aunque consumen una cantidad fija de recursos e de sus padres. En el segundo periodo, los individuos trabajan, ganan un salario w_t, y gastan su renta consumiendo c_t, ahorrando s_t y manteniendo sus n_t hijos. Suponemos que la oferta de trabajo es totalmente inelástica e igual a una unidad. En el tercer y último periodo de su vida, los agentes reciben la renta del capital de su ahorro $R_{t+1}s_t$, donde R es el tipo de interés bruto, y consumen d_{t+1}.

Puesto que hay dos objetivos —restaurar la tasa de fecundidad óptima y restaurar el *stock* de capital óptimo— parece que la descentralización del *first best* requiera del uso de dos instrumentos. Sin embargo, veremos que introducir un sistema de pensiones que ligue las pensiones a la fecundidad de las familias es suficiente para alcanzar ambos objetivos.

Para descentralizar el *first best* introducimos, en la economía de libre mercado, un sistema de Seguridad Social de reparto en el que las pensiones de los jubilados son proporcionales al número de hijos que han tenido, así como al nivel de los salarios vigentes en el momento en que se pagan las pensiones, de manera que:

$$p_{t+1} = w_{t+1}\tau_{t+1}n_t \tag{2.5}$$

siendo p_{t+1} la pensión y τ_{t+1} la tasa de cotización a la Seguridad Social en el periodo $t + 1$. Nuestro objetivo es mostrar que, si la tasa de cotización se elige de forma adecuada, esta política de pensiones restaura la optimalidad de la economía competitiva, con lo que se alcanza el estado estacionario óptimo.

Suponemos que los individuos saben que esta política es operativa, de forma que la restricción presupuestaria del sistema de Seguridad

5. Recuérdese que la restricción presupuestaria de un sistema de pensiones de reparto viene dada por $p_{t+1}N_t = w_{t+1}\tau_{t+1}N_{t+1}$.

representativo maximiza su función de utilidad sujeta a las siguientes restricciones presupuestarias:

$$c_t + s_t + en_t = w_t(1 - \tau_t) \tag{2.6}$$

$$d_{t+1} = s_t R_{t+1} + w_{t+1}\tau_{t+1} n_t \tag{2.7}$$

respecto a c_t, d_{t+1}, s_t y n_t, donde la pensión p_{t+1} ya ha sido sustituida por su expresión en (2.5). Solucionando el problema obtenemos las siguientes CPO:

$$\frac{u_{c,t}}{u_{d,t}} = R_{t+1} \tag{2.8}$$

$$\frac{u_{n,t}}{u_{c,t}} + \frac{w_{t+1}\tau_{t+1}}{R_{t+1}} = e \tag{2.9}$$

La ecuación (2.9) es la CPO respecto al número de hijos. El individuo decide cuántos hijos va a tener igualando el coste marginal de tener un hijo adicional e al beneficio marginal, que es la suma de dos componentes: la utilidad marginal de los hijos en términos de consumo, más el beneficio marginal en términos de la mayor pensión que recibirá del sistema de Seguridad Social si tiene otro hijo. En la economía centralizada, hemos visto que cuando decide la n óptima —véase la ecuación (2.3)— el planificador tiene en cuenta los tres efectos explicados en la sección anterior.

Del problema de una empresa representativa, obtenemos las condiciones:

$$R_t \equiv 1 + r_t = f'(k_t) + 1 - \delta \tag{2.10}$$

$$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t) \tag{2.11}$$

Finalmente, la condición de equilibrio del mercado de capital viene dada por:

$$k_{t+1} = \frac{s_t}{n_t} \tag{2.12}$$

2.3. Comparación de las dos soluciones en el estado estacionario

Usando (2.10), podemos expresar (2.8) en el estado estacionario como:

$$\frac{u_c}{u_d} = f'(k) + 1 - \delta \tag{2.13}$$

Al mismo tiempo, por medio de (2.7), (2.10) y (2.12), la ecuación (2.9) se puede escribir en el estado estacionario como:

$$\frac{u_n}{u_c} + \frac{d}{n[f'(k) + 1 - \delta]} = e + k \tag{2.14}$$

Por tanto, si comparamos las condiciones de equilibrio en el estado estacionario de las economías centralizada y descentralizada, escritas de manera que puedan compararse más fácilmente, vemos que las dos soluciones serán idénticas si el tipo de interés de la economía de mercado es igual a la tasa de crecimiento de la población. Dicho de otro modo, si se satisface la regla de oro en la economía de mercado, las dos soluciones dan lugar a los mismos niveles de capital por trabajador, tasa de natalidad y consumo en el estado estacionario. Por tanto, el gobierno puede elegir la tasa de cotización *óptima* τ^* del sistema de pensiones de reparto que hace que el *stock* de capital de la economía descentralizada sea igual al *stock* óptimo, con lo que se alcanza de esta forma la optimalidad en el resto de variables. Para cualquier otro valor de τ el *stock* de capital será distinto del óptimo, y por consiguiente lo mismo ocurrirá para todas las demás variables económicas. Este único instrumento es suficiente para alcanzar el *stock* de capital y la tasa de crecimiento de la población óptimos.

2.3.1. Un ejemplo: funciones de utilidad y de producción Cobb-Douglas

En el caso particular de tener unas preferencias y una función de producción de tipo Cobb-Douglas, es decir:

$$u(c_t, d_{t+1}, n_t) = \log c_t + \beta \log d_{t+1} + \theta \log n_t$$

$$f(k_t) = Ak_t^{\alpha}$$

con β, $\theta > 0$; $0 < \alpha < 1$. Suponiendo $\delta = 1$ y solucionando el problema del planificador en el estado estacionario, llegamos al siguiente *stock* de capital por trabajador:

$$k^* = \frac{(1+\theta+2\beta)e\alpha}{\theta+\beta-\alpha(1+\theta+2\beta)}$$

Por tanto, necesitamos $\theta + \beta > \alpha(1 + \theta + 2\beta)$ para que k^* sea positivo. Esta desigualdad, además, asegura que las condiciones de segundo orden del problema se satisfacen, tal como se muestra en el apéndice.

En la economía descentralizada, en la que se ha introducido la propuesta de reforma del sistema de pensiones, el capital por trabajador del estado estacionario viene dado por la expresión:

$$\hat{k} = \frac{\alpha\beta e}{\alpha\theta+(1-\alpha)(\theta+\beta)\tau}$$

El valor de τ que hace que los dos *stocks* de capital coincidan es:

$$\tau^* = \frac{\beta-\alpha(1+\theta+2\beta)}{(1-\alpha)(1+\theta+2\beta)}$$

Por tanto, si el gobierno elige este nivel para la tasa de cotización, se alcanza tanto k^* como n^* en la economía descentralizada. Nótese que τ^* siempre es inferior a 1, y que puede ser positivo o negativo según sea el signo de la expresión $\beta - \alpha(1 + \theta + 2\beta)$. En particular, si $\beta - \alpha(1 + \theta + 2\beta) > 0$, el valor del *stock* de capital en la economía de libre mercado —en que no existe ningún sistema de Seguridad Social, de manera que $\tau = 0$— es mayor que el óptimo, mientras que la tasa de crecimiento de la población es menor que la óptima. Además, como se ve en el apéndice, en este caso las condiciones de segundo orden se satisfacen automáticamente. Por otra parte, si $\beta - \alpha(1 + \theta + 2\beta) < 0$, habrá subacumulación de capital en la economía de libre mercado, y la población crecerá a un ritmo mayor que el óptimo. Dado que $\hat{k}$ depende negativamente de τ, en el primer caso τ^* deberá ser positivo, mientras que en el segundo caso será negativo. Una tasa de cotización negativa implicaría un sistema que redistribuyera recursos de los individuos más ancianos a los adultos. La situación presente parece estar más bien representada por el primero de estos dos casos.

3. El modelo con agentes heterogéneos

A partir de ahora supondremos que existen dos tipos de individuos: una fracción γ del total de individuos deriva utilidad de tener hijos, mientras que al resto no le gusta tenerlos. Denotaremos las variables correspondientes al primer tipo de agentes mediante el superíndice *A*, y las correspondientes al segundo tipo de agentes mediante *B*. Supondremos además que la fracción de individuos de cada tipo se mantiene constante a lo largo del tiempo [6].

Las preferencias de cada tipo de agente son, por tanto:

$$u_t^A = u^A(c_t^A, d_{t+1}^A, n_t^A)$$

$$u_t^B = u^B(c_t^B, d_{t+1}^B)$$

Al igual que antes, suponemos que estas funciones son crecientes y cóncavas en cada uno de sus argumentos.

En este caso, la tasa de crecimiento de la población de la economía es $\widetilde{n}_t - 1$, con:

$$\widetilde{n}_t = \gamma n_t^A + (1-\gamma) n_t^B$$

3.1. El planificador

Suponemos que el planificador maximiza una suma ponderada de las utilidades del agente representativo de cada tipo. Sea μ el peso asignado a la utilidad de los agentes del tipo *A* y $(1 - \mu)$ el peso asignado a la

6. Si, por el contrario, supusiéramos que los hijos tienen las mismas preferencias que sus padres, la fracción de agentes a quienes les gustan los niños iría aumentando con el tiempo hasta que desapareciera la heterogeneidad.

utilidad de los agentes del tipo *B*. Entonces el problema del planificador es:

$$\max \mu u^A(c^A, d^A, n^A) + (1-\mu)u^B(c^B, d^B)$$

sujeto a:

$$f(k) + (1-\delta)k = \gamma c^A + (1-\gamma)c^B + \frac{\gamma d^A + (1-\gamma)d^B}{\tilde{n}} + e\tilde{n} + k\tilde{n}$$

respecto a c^A, c^B, d^A, d^B, n^A, n^B y k. Dados los supuestos hechos sobre las preferencias, no es necesario incluir restricciones de no-negatividad para ninguna variable excepto para n^B. Las CPO para el planificador son:

$$\frac{u_c^A}{u_d^A} = \frac{u_d^B}{u_d^B} = \tilde{n} \tag{3.1}$$

$$\frac{u_c^A}{u_c^B} = \frac{u_d^A}{u_d^B} = \frac{1-\mu}{\mu}\frac{\gamma}{1-\gamma} \tag{3.2}$$

$$\frac{u_n^A}{u_c^A} + \frac{\gamma d^A + (1-\gamma)d^B}{\tilde{n}^2} = e + k \tag{3.3}$$

$$\frac{\gamma d^A + (1-\gamma)d^B}{\tilde{n}^2} \leq e + k \tag{3.4}$$

$$f'(k) + 1 - \delta = \tilde{n} \tag{3.5}$$

Si comparamos las ecuaciones (3.3) y (3.4), nos daremos cuenta de que la última debe satisfacerse con desigualdad estricta, puesto que $\frac{u_3^A}{u_1^A} > 0$, cosa que implica que $n^B = 0$. Por lo tanto, el planificador decide que sean únicamente los individuos a quienes les gustan los hijos los que los tengan. Entonces, $\tilde{n} = \gamma n^A$ y podemos sustituir esta expresión en las ecuaciones (3.1), (3.3) y (3.5).

3.2. La economía descentralizada

Las restricciones presupuestarias de un agente representativo del tipo i ($i = A, B$) son:

$$c_t^i + s_t^i + en_t^i = w_t\ (1 - \tau_t)$$

$$d_{t+1}^i = s_t^i R_{t+1} + w_{t+1}\tau_{t+1} n_t^i$$

Las condiciones de la solución de equilibrio para ambos tipos de individuos son:

$$\frac{u_{c,t}^A}{u_{d,t}^A} = \frac{u_{c,t}^B}{u_{d,t}^B} = R_{t+1} \tag{3.6}$$

$$\frac{u_{n,t}^A}{u_{c,t}^A} + \frac{w_{t+1}\tau_{t+1}}{R_{t+1}} = e \tag{3.7}$$

$$n^B = 0 \tag{3.8}$$

La última de estas ecuaciones nos dice que los individuos a quienes no les gustan los hijos nunca decidirán tener alguno, incluso en presencia de un sistema de Seguridad Social de reparto como el propuesto que distribuye pensiones en proporción directa al número de hijos de cada individuo. De hecho, como puede verse en la ecuación (3.7), la pensión sólo cubre una parte del coste de los niños, concretamente la parte del coste que no se compensa por la utilidad marginal —de los agentes que derivan utilidad de tener hijos— de tenerlos. Ésta es la razón por la cual los agentes a quienes no les gustan los niños nunca querrán tenerlos. Este resultado tiene todavía otra implicación. Si comparamos la restricción presupuestaria intertemporal de los dos tipos de individuos, veremos que, mientras que ambos tienen el mismo salario neto, los agentes del tipo A consumen menos, puesto que destinan una parte de sus recursos a alimentar y educar a sus hijos y luego reciben a cambio solamente una parte de estos recursos en su pensión.

Las condiciones de equilibrio de las empresas son las mismas que en el caso de agentes homogéneos, dado que en el sector productivo no ha cambiado nada.

La condición de equilibrio en el mercado de capital ahora viene dada por:

$$k_t = \frac{\gamma s_t^A + (1-\gamma) s_t^B}{\gamma n^A} \tag{3.9}$$

3.3. Comparación de las dos soluciones en el estado estacionario

Al igual que antes, podemos reescribir las ecuaciones (3.6) y (3.7) en el estado estacionario como:

$$\frac{u_c^A}{u_d^A} = \frac{u_c^B}{u_d^B} = f'(k) + 1 - \delta$$

$$\frac{u_n^A}{u_c^A} + \frac{\gamma d^A + (1-\gamma) d^B}{\gamma n^A [f'(k) + 1 - d]} = e + k$$

para que resulte más fácil compararlas con las ecuaciones (3.1) y (3.3) correspondientes al óptimo del planificador.

De nuevo, si se satisface la regla de oro en la economía descentralizada con el sistema de pensiones que hemos definido anteriormente, se alcanzan el nivel óptimo de capital por trabajador y la tasa óptima de crecimiento de la población. Esto puede comprobarse fácilmente comparando las ecuaciones de las dos soluciones de equilibrio. Por lo tanto, el gobierno puede elegir la tasa de cotización óptima que permite llegar a este resultado. Sin embargo, esta política no restaura plenamente la optimalidad de la economía descentralizada, puesto que no necesariamente se alcanza una redistribución óptima de los recursos entre los agentes. Supongamos, por ejemplo, que el planificador asigna un peso a la utilidad de los agentes del tipo i igual a la fracción que este tipo de individuos representa en el total de la población; es decir, $\mu = \gamma$. Si suponemos que las funciones de utilidad satisfacen las condiciones siguientes:

$$u^B(c, d) = u(c, d)$$
$$u^A(c, d, n) = u(c, d) + v(n)$$

de forma que las utilidades marginales respecto al consumo son las mismas para los dos tipos de individuos, los pesos específicos que hemos elegido implican que el consumo de los agentes debería ser el mismo en la solución óptima. Como hemos visto anteriormente, en la economía descentralizada nunca se dará este caso, ya que los hijos no son enteramente subsidiados por el sistema de Seguridad Social [7].

Si queremos que todos los agentes consuman lo mismo, debemos introducir otro instrumento que transfiera recursos de los agentes a quienes no les gustan los niños a los agentes a quienes sí les gustan. Por ejemplo, podríamos hacerlo a través de impuestos y transferencias de suma fija, tal como [8]:

$$c_B + \frac{d^B}{R} = w(1-\tau) - \Psi^B$$

$$c_A + \frac{d^A}{R} + en^A = w(1-\tau) + \frac{w\tau n^A}{R} + \Psi^A$$

con Ψ^A, $\Psi^B > 0$, donde Ψ^B es un impuesto de suma fija sobre los agentes del tipo B y Ψ^A es una transferencia de suma fija dada a los agentes del tipo A. Dado que el tamaño de cada grupo de agentes es distinto, debe cumplirse la siguiente condición:

$$\Psi^A = \frac{1-\gamma}{\gamma}\Psi^B$$

El valor de estos impuestos y transferencias puede obtenerse igualando los consumos de las dos restricciones presupuestarias intertemporales, obteniendo:

$$\Psi^B = \gamma\left[en^A - \frac{w\tau n^A}{R}\right]$$

7. Nótese que, si fuera el caso, como ocurre en Bental (1989), los individuos del tipo A tendrían tantos hijos como les fuera posible, en tanto que no tendrían ningún coste y además les proporcionan utilidad. En este caso, habría un *overshooting* en el número de niños de la economía.

8. Alternativamente, podríamos hacerlo mediante un recargo y una reducción en la tasa de cotización a la Seguridad Social, que en un entorno de oferta de trabajo inelástica es equivalente a utilizar impuestos y transferencias de suma fija.

El papel de esta política de impuestos y transferencias de suma fija es, por tanto, reasignar la utilidad que los niños generan en la economía a los agentes que de hecho tienen estos niños.

Nótese que la transferencia que se da a los agentes del tipo A es independiente del número de hijos que tengan, siempre y cuando tengan alguno. Dado que las políticas de suma fija no distorsionan las decisiones individuales, los incentivos de ninguno de los dos tipos de agentes no se verán afectados, es decir, los agentes del tipo B continuarán sin desear tener hijos y los del tipo A decidirán tener los mismos que antes de recibir la transferencia.

Aunque esta política basada en dos instrumentos restaura la optimalidad, la solución implica que los agentes del tipo B tendrán menos utilidad que los del tipo A. Esto es debido a los pesos específicos ($\mu = \gamma$) que han sido empleados en la función de bienestar social —que implican un objetivo utilitarista—. Si pensáramos que la función de bienestar social debería ser tal que el planificador siempre asignara la misma utilidad a cada agente independientemente de cuáles fueran sus preferencias —es decir, si quisiéramos emplear un objetivo igualitario—, la política de impuestos y transferencias de suma fija debería definirse de manera que igualara las utilidades de los agentes en lugar de sus consumos. En este caso, la dirección de las transferencias no está clara y dependería de la forma concreta de las funciones de utilidad. La única cosa de la cual podemos estar seguros es de que Ψ^B sería menor con el objetivo igualitario que con el utilitarista.

Desde un punto de vista normativo, no podemos discriminar entre las dos funciones de bienestar que hemos mencionado. Sin embargo, hay un caso específico en el que parecería más apropiado utilizar un objetivo igualitario. Supongamos que algunos individuos estuvieran dispuestos a tener hijos pero no pudieran. Puede demostrarse que, en un modelo similar al que hemos derivado en esta sección pero en el cual a todos los individuos les gustaran los hijos y solamente una parte de ellos pudiera tenerlos, las políticas para descentralizar el óptimo serían las mismas. En este caso, con un objetivo utilitarista, el segundo instrumento que hemos propuesto restaría utilidad de los agentes *desafortunados* que no pueden tener los hijos que querrían, para aumentar la utilidad de los agentes *afortunados*. Por tanto, la incapacidad para tener hijos sería penalizada por doble partida: en primer lugar, los individuos que no tuvieran hijos no recibirían ninguna pensión del sistema de Seguridad Social a pesar de haber contribuido con sus cotizaciones; y en segundo lugar, se les impondría un impuesto de suma fija para transferir más recursos a las familias con hijos. Esto es así porque, para esta función de bienestar específica, al planificador no le importa cada individuo en particular sino solamente el agente representativo.

Apéndice I: Condiciones de segundo orden

UTILIZANDO los siguientes supuestos para las funciones de utilidad y de producción:

$$u_i > 0 \qquad i = c, d, n$$

$$u_{ii} < 0 \qquad i = c, d, n$$

$$u_{ij} = 0 \qquad i = c, d, n; \qquad j = c, d, n; \qquad i \neq j$$

$$f'(k) > 0$$

$$f''(k) < 0$$

y usando el método de los menores principales, puede demostrarse que la matriz hessiana correspondiente al problema del planificador, evaluada en las CPO, es semidefinida negativa si se cumplen las dos condiciones siguientes:

$$f''(k)u_{nn} > u_c \tag{A.I.1}$$

$$-2d\left[u_{dd} + \frac{u_{cc}}{n^2}\right] > \frac{u_c}{n} \tag{A.I.2}$$

que aseguran que la solución es un máximo local, puesto que es una solución interior y la función objetivo es cóncava. Estas dos ecuaciones dan las condiciones de segundo orden para el problema del planificador.

Ejemplo Cobb-Douglas. Si usamos funciones de utilidad y de producción Cobb-Douglas como las que hemos descrito en el apartado 2.3, la ecuación (A.I.2) se cumple automáticamente, y la otra condición que necesitamos para tener un máximo es la ecuación (A.I.1), que puede expresarse como:

$$\alpha < \frac{\theta + \beta}{1 + \theta + 2\beta}$$

Tal como puede verse en el apartado 2.3, esta condición siempre se da para valores relevantes de las variables, concretamente valores positivos.

Parte II: Optimalidad de los sistemas de pensiones de reparto en un modelo con transición demográfica endógena

*con Géraldine Mahieu**

En esta segunda parte del trabajo, desarrollamos un modelo más complejo que es capaz de replicar la transición demográfica observada en las últimas décadas en la mayoría de los países desarrollados. En primer lugar, el coste de los hijos, que hasta ahora se consideraba como un coste monetario fijo, se modifica para introducir un coste fijo en términos de tiempo. Cuando deciden tener un hijo, los padres deben dedicarle tiempo y por ello podrán ofrecer menos horas en el mercado laboral [9]. La segunda diferencia, directamente relacionada con la anterior, es la introducción de una oferta de trabajo elástica; las familias de este modelo deben decidir qué parte de su tiempo dedican a trabajar y qué parte a tener hijos. La tercera diferencia concierne a la composición de las familias. Si en el modelo de la parte I, éstas eran monoparentales, de ahora en adelante las unidades de análisis serán las parejas, formadas por un hombre y una mujer. Por último, el sector

* Université Catholique de Louvain, Department of Economics, *Institut de Recherche Économiques et Sociales* (IRES).

9. Una forma alternativa de interpretar este coste consiste en suponer que los padres continúan trabajando la jornada completa, pero pagan a una tercera persona o institución para que se haga cargo de los hijos. El coste que esto representa más el propio coste de mantener a los hijos —alimentación, ropa, etc.— equivale a la parte del salario que dejarían de cobrar si lo hicieran ellos mismos.

productivo también será un poco más complejo en el nuevo modelo. En particular, supondremos que existen tres factores de producción: capital, trabajo *físico* y trabajo *intelectual.* Los hombres y las mujeres disponen de distintas dotaciones de estos factores productivos, de manera que serán las mujeres las que, en primer lugar, tendrán un coste de oportunidad menor y renunciarán a parte de su trabajo para tener los hijos; y, en segundo lugar, aumentarán su participación laboral a medida que la economía va acumulando capital y va creciendo el coste de oportunidad de tener hijos, produciéndose así la transición demográfica.

Esta segunda parte está estructurada de la siguiente manera. En el apartado 4 explicamos detalladamente el modelo y encontramos el equilibrio de la economía de libre mercado. Seguidamente, con el objetivo de diseñar la reforma del sistema de pensiones, determinamos la distribución óptima de los recursos en el modelo. Después descentralizamos el óptimo y encontramos, al igual que en la primera parte del trabajo, que una política que liga las pensiones al número de hijos permite alcanzar tanto el *stock* de capital óptimo como la tasa de crecimiento óptima de la población. Sin embargo, en este caso los salarios femeninos no deben pagar cotizaciones al sistema, para evitar distorsiones en la oferta de trabajo femenina. Finalmente, comparamos esta política óptima de pensiones con el sistema actual, para inferir algunas sugerencias de cara a una reforma del sistema de pensiones que aumente el bienestar de todos los individuos. La principal conclusión que sacamos es que es posible que, en un contexto con fecundidad endógena, sea más eficiente hacer una reforma que mantenga el sistema de reparto que pasar a un sistema de capitalización.

4. La economía de libre mercado

TOMAMOS de nuevo un modelo de generaciones solapadas de tres periodos, donde el primer periodo corresponde a la infancia, en que no se toma ninguna decisión. La economía está constituida por parejas, formadas cada una por un hombre y una mujer. Hombres y mujeres difieren en su habilidad en el proceso productivo, y por lo tanto, en sus dotaciones de los factores de producción. Suponemos que tanto los hombres como las mujeres están dotados con una unidad de trabajo intelectual, pero los hombres tienen, además, una unidad de trabajo físico. La función de producción incluye, por tanto, tres *inputs,* dos tipos de trabajo y capital físico:

$$Y_t = F(K_t, L_t^m, L_t^p)$$

siendo K_t el *stock* de capital físico, L_t^m el *stock* de trabajo intelectual, y L_t^p la cantidad de trabajo físico. La función de producción $F()$ es tal que el capital es más complementario con el trabajo intelectual que con el trabajo físico. Por lo tanto, a medida que una economía se desarrolla y va aumentando su nivel de capital, el salario intelectual aumenta más que proporcionalmente que el salario físico. Éste va a ser el motor de la transición demográfica (al igual que sucede en Galor y Weil, 1996).

Dado que el trabajo físico se ofrece de manera inelástica por parte de los hombres, la cantidad total de trabajo físico, L_t^p, es igual al número de familias en edad de trabajar. Por tanto, podemos expresar la función de producción en términos por unidad familiar como:

$$y_t = f(k_t, m_t)$$

con derivadas $f_k(k_t, m_t) > 0$ y $f_m(k_t, m_t) > 0$, y donde y_t, k_t, m_t son respectivamente la producción, el capital y el trabajo intelectual por pareja.

El comportamiento competitivo de la empresa representativa implica la igualdad de las productividades marginales de los factores y sus precios:

$$w_t^m = f_m(k_t, m_t) \tag{4.1}$$

$$R_t = f_k(k_t, m_t) \tag{4.2}$$

$$w_t^p = f(k_t, m_t) - k_t f_k(k_t, m_t) - m_t f_m(k_t, m_t) \tag{4.3}$$

siendo w_t^p y w_t^m los salarios del trabajo físico e intelectual respectivamente, y R_t el tipo de interés en el periodo t. Suponemos que el capital se deprecia totalmente en el proceso productivo.

Las preferencias de las parejas están representadas por la siguiente función de utilidad, separable en cada uno de sus argumentos:

$$U_t(n_t, c_t, d_{t+1}) = \gamma u(n_t) + (1 - \gamma)\,[u(c_t) + \beta u(d_{t+1})] \tag{4.4}$$

donde $n_t \equiv \dfrac{N_{t+1}}{N_t}$ es el número de hijos (expresado ahora en número de *parejas de hijos*) que tiene la familia, c_t es el consumo en el primer periodo de la vida adulta, y d_{t+1} es el consumo en el segundo periodo. $0 < \beta < 1$ es el factor de descuento subjetivo y $0 < \gamma < 1$ es un parámetro que representa el peso asignado a los niños en la función de utilidad. Las primeras derivadas de la función de utilidad respecto a cada uno de sus argumentos pueden escribirse como $\gamma u_{n,t} > 0$, $(1 - \gamma)u_{c,t} > 0$, $(1 - \gamma)\beta u_{d,t+1} > 0$.

Las parejas o familias viven dos periodos. En el primer periodo, tienen los hijos que desean, ofrecen trabajo físico e intelectual en el mercado laboral, consumen y ahorran. Los niños proporcionan utilidad a sus padres pero son costosos en términos de tiempo, ya que el tiempo dedicado a tener y mantener un hijo no puede emplearse en el mercado de trabajo. Suponemos que cada hijo consume una fracción z de la dotación de tiempo de uno de sus padres. Dado que las mujeres solamente están dotadas con trabajo intelectual, el coste de oportunidad de tener un hijo es menor para ellas que para los hombres. Por tanto, sólo las mujeres dividirán su tiempo entre trabajar en el mercado laboral y cuidar hijos. Además, la decisión del número de hijos está limitada superiormente por la dotación de tiempo de la mujer (zn_t no puede ser mayor que 1) [10]. En el segundo periodo de su vida, las parejas consumen sus ahorros.

10. Se asume, por tanto, que las familias nunca desearán tener tantos hijos que incluso el hombre tenga que trabajar a tiempo parcial.

Las restricciones presupuestarias de la familia vienen dadas por:

$$c_t + s_t = w_t^p + w_t^m (2 - z n_t) \tag{4.5}$$

$$d_{t+1} = R_{t+1} s_t \tag{4.6}$$

donde s_t denota el ahorro en el periodo t.

Maximizando la función de utilidad familiar sujeta a estas dos restricciones se obtienen las siguientes condiciones de primer orden (CPO):

$$\frac{u_{c,t}}{u_{d,t+1}} = \beta R_{t+1} \tag{4.7}$$

$$\frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{u_{n,t}}{u_{c,t}} = z w_t^m \tag{4.8}$$

La ecuación (4.7) determina la distribución del consumo en el tiempo, y por tanto también la cantidad ahorrada s_t. La segunda CPO (4.8) determina la cantidad de tiempo dedicada a tener hijos mediante la igualación de la utilidad marginal de los hijos a su coste de oportunidad en términos de consumo. Cuanto más alto sea el salario intelectual, mayor es también el coste de oportunidad de tener hijos. Mientras este salario sea relativamente bajo, las mujeres dedicarán todo su tiempo a tener hijos. Sin embargo, puesto que el capital y el trabajo intelectual son factores complementarios, la acumulación de capital aumenta el coste de los niños en mayor proporción que la renta familiar, lo que induce a las mujeres a dedicar cada vez más tiempo a trabajar y produce una transición demográfica. Por otra parte, cuanto mayor sea γ, mayor es la utilidad marginal de los hijos, menor la utilidad marginal del consumo y por tanto menos sensible es la decisión del número de hijos a cambios en el salario. Así, si γ es demasiado alto, la utilidad de tener hijos es tan alta que las mujeres nunca querrán participar en el mercado laboral, independientemente del nivel salarial. Dado que en el mundo real se observa participación laboral femenina, supondremos que γ es menor que 1/2, de forma que el peso dado a los niños en la función de utilidad es menor que el peso dado al consumo.

El capital se determina a partir del ahorro del periodo precedente. La condición de equilibrio en el mercado de capital de esta economía viene dada por:

$$k_{t+1} = \frac{s_t}{n_t} \tag{4.9}$$

Finalmente, la condición de equilibrio del mercado de trabajo es:

$$m_t = 2 - zn_t \tag{4.10}$$

Definición 1. Un equilibrio competitivo es un conjunto de cantidades $(c_t, d_t, n_t, s_t, k_t, m_t, y_t)$ y precios (w_t^m, w_t^p, R_t) positivos tales que se cumplen las ecuaciones (4.1), (4.2), (4.3), (4.5), (4.6), (4.7), (4.8), (4.9) y (4.10).

Definición 2. Un estado estacionario en la economía de libre mercado es una senda estacionaria $(c_t, d_t, n_t, s_t, k_t, m_t, y_t) = (c, d, n, s, k, m, y)$ y un vector de precios (w^m, w^p, R) con cantidades positivas que verifican las siguientes condiciones:

$$\frac{u_c}{u_d} = \beta f_k(k, m) \tag{4.11}$$

$$\frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{u_n}{u_c} = zf_m(k, m) \tag{4.12}$$

$$f(k, m) = c + \frac{d}{f_k(k, m)} + kf_k(k, m) \tag{4.13}$$

con

$$d = Rs \tag{4.14}$$

$$m = 2 - zn \tag{4.15}$$

$$s = kn \tag{4.16}$$

$$R = f_k(k, m) \tag{4.17}$$

$$w^m = f_m(k, m) \tag{4.18}$$

$$w^p = f(k, m) - kf_k(k, m) - mf_m(k, m) \tag{4.19}$$

Véase la sección 8 para el análisis de la dinámica de la economía de libre mercado.

5. El problema del planificador

PARA poder comparar la anterior solución competitiva con la óptima, a continuación derivamos el equilibrio elegido por un planificador benevolente en esta economía.

La restricción de recursos de la economía viene dada por:

$$f(k_t, m_t) = c_t + \frac{d_t}{n_{t-1}} + n_t k_{t+1} \tag{5.1}$$

donde $m_t = 2 - zn_t$.

El planificador maximiza la función de utilidad (4.4) en el estado estacionario sujeta a la restricción de recursos anterior, es decir:

$$\max \gamma u(n) + (1 - \gamma) [u(c) + \beta u(d)] \tag{5.2}$$

s.a.

$$f(k, m) = c + \frac{d}{n} + nk \tag{5.3}$$

Definición 3. Una asignación óptima en el estado estacionario es un vector *(c, d, n, k, m)* de cantidades positivas tales que maximizan la función de utilidad (5.2) sujeta a la restricción (5.3).

En el estado estacionario, una solución óptima interior se caracteriza por las siguientes condiciones de optimalidad:

$$\frac{u_c}{u_d} = \beta n \tag{5.4}$$

$$f_k (k, m) = n \tag{5.5}$$

$$\frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{u_n}{u_c} + \frac{d}{n^2} = z f_m (k, m) + k \tag{5.6}$$

$$f(k,m) = c + \frac{d}{n} + nk \qquad (5.7)$$

$$m = 2 - zn \qquad (5.8)$$

La primera ecuación determina la asignación del consumo en el tiempo, o la distribución del consumo entre las generaciones vivas. La segunda condición es la conocida *regla de oro,* que determina el *stock* de capital óptimo. La tercera condición de primer orden determina el número óptimo de hijos. El planificador iguala el beneficio marginal de tener niños a su coste marginal.

El primero viene dado por la utilidad marginal que supone a los padres tener un hijo —en términos de consumo— más el *efecto de transferencias intergeneracionales* [11]. El coste marginal es la pérdida de producción debida al coste de tiempo de los hijos más el *efecto de dilución del capital* [12].

5.1. Existencia de una solución interior

El problema de la existencia de una solución óptima interior no es, en absoluto, trivial. Deardorff (1976) mostró que la solución interior obtenida por Samuelson (1975) para la tasa de crecimiento óptima de la población era en realidad un mínimo para una amplia variedad de funciones de utilidad y de producción, incluido el caso típico de funciones Cobb-Douglas. Como veremos, esto no ocurre necesariamente en nuestro contexto de fecundidad endógena, sino que existe la posibilidad de tener un máximo global interior.

La existencia y unicidad de una solución interior al problema del planificador depende de la forma que adopten las funciones de producción y de utilidad. A continuación analizamos cómo se comporta la función objetivo del planificador en este modelo en el caso particular

11. Recordemos que este efecto captura el hecho de que, cuando la población crece, el consumo de los ancianos resulta más barato.

12. Este efecto, en cambio, resulta del hecho de que cuanto mayor es la tasa de crecimiento de la población, mayor es la inversión requerida para mantener constante el *stock* de capital per cápita.

de una función de utilidad logarítmica y una función de producción Cobb-Douglas, es decir,

$$U_t(n_t, c_t, d_{t+1}) = \gamma \log(n_t) + (1-\gamma)[\log(c_t) + \log(d_{t+1})] \tag{5.9}$$

$$f(k_t, m_t) = a k_t^{\alpha} m_t^{1-\alpha} + b \tag{5.10}$$

con a > 0, b > 0, 0 < γ < 1/2.

Proposición 4. Con una función de utilidad logarítmica y una función de producción Cobb-Douglas existe un único máximo global interior si y sólo si se cumple la siguiente condición:

$$\alpha > \frac{\gamma + \beta(1-\gamma)}{1 + 2\beta(1-\gamma)} \tag{5.11}$$

Demostración. Para las funciones específicas definidas anteriormente, manipulando las condiciones de primer orden del problema del planificador podemos expresar *c, d* y *k* en función únicamente de *n:*

$$k = k(n) = (2 - zn)\left(\frac{a\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$c = c(n) = \frac{1}{1+\beta}\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}(a\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}(2 - zn)n^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} + b\right]$$

$$d = d(n) = \beta n \frac{1}{1+\beta}\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}(a\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}(2 - zn)n^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} + b\right]$$

Ello implica que podemos escribir la siguiente función de utilidad indirecta:

$$V(n) = \gamma \log(n) + (1-\gamma)[\log(c(n)) + \beta \log(d(n))]$$

Derivando con respecto a *n,* y reagrupando términos, obtenemos:

$$V'(n) = \frac{[\gamma + \beta(1-\gamma)]}{n} - \left(\frac{a\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{(1-\gamma)(1+\beta)[2 + zn(\frac{1-2\alpha}{\alpha})]}{\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}(a\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}(2 - zn)n^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} + b\right]}$$

que puede expresarse como:

$$V'(n) = \frac{b[\gamma + \beta(1-\gamma)]}{n^{\frac{1}{1-\alpha}}\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}(a\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}(2-zn)n^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} + b\right]} g(n)$$

donde

$$g\ (n) \equiv n^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - An + B$$

con $A \equiv \dfrac{z(a\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left[\frac{(1-\alpha)}{\alpha}[1+2\beta(1-\gamma)] - (1-\gamma)(1+\beta)\right]}{b[\gamma+\beta(1-\gamma)]}$

y $B \equiv \dfrac{2(a\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}[\gamma - \alpha + \beta(1-\gamma)(1-2\alpha)]}{\alpha b[\gamma+\beta(1-\gamma)]}$. Esta función $g\ (n)$ puede emplearse para analizar los puntos críticos de $V\ (n)$. Es sencillo ver que $g(n)$ empieza desde el valor constante B cuando $n \to 0$ y tiende a $-\infty$ cuando $n \to \infty$. Haciendo $g'(n) = 0$, obtenemos:

$$\hat{n} = \left[\frac{1-\alpha}{\alpha} A\right]^{-\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}}$$

Suponiendo que $\alpha < 1/2$, A es siempre positivo, lo cual implica que hay un único punto crítico para $g\ (n)$. Además, usando la segunda derivada de $g\ (n)$, se puede comprobar fácilmente que este punto es un máximo. Por tanto, $g\ (n)$ tiene una única raíz cuando B es positivo, es decir, cuando se cumple la condición (5.11). En el gráfico 5.1 se representa este caso. Si B es negativo, $g\ (n)$ puede tener una, dos o ninguna raíz dependiendo del valor de los parámetros.

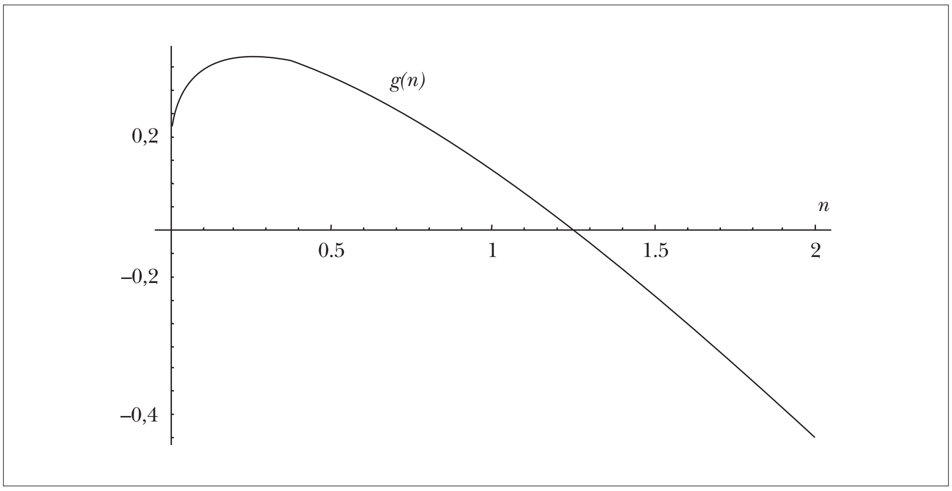
Para conocer la forma de $V\ (n)$, es necesario estudiar los límites de sus derivadas cuando n tiende a 0 e ∞. Estos límites resultan ser:

$$\lim_{n \to 0} V'(n) = \begin{cases} +\infty & \text{si } B > 0 \\ -\infty & \text{si } B < 0 \end{cases}$$

y

$$\lim_{n \to +\infty} V'(n) = 0$$

GRÁFICO 5.1: Forma de *g (n)* cuando *B* > 0

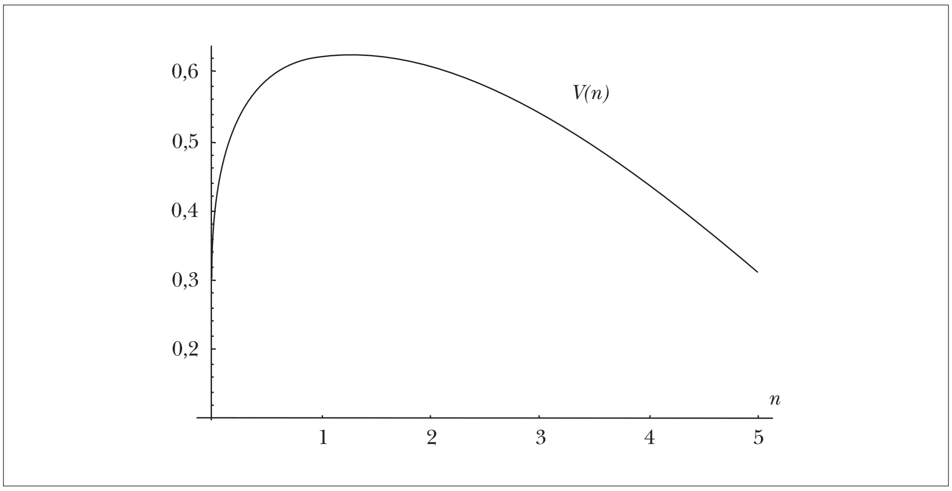


Por tanto, en el caso en que $B > 0$, la forma de $V(n)$ es la que aparece en el gráfico 5.2*a*. Si $B < 0$, hay dos posibles casos que se muestran en los paneles *b* y *c*.

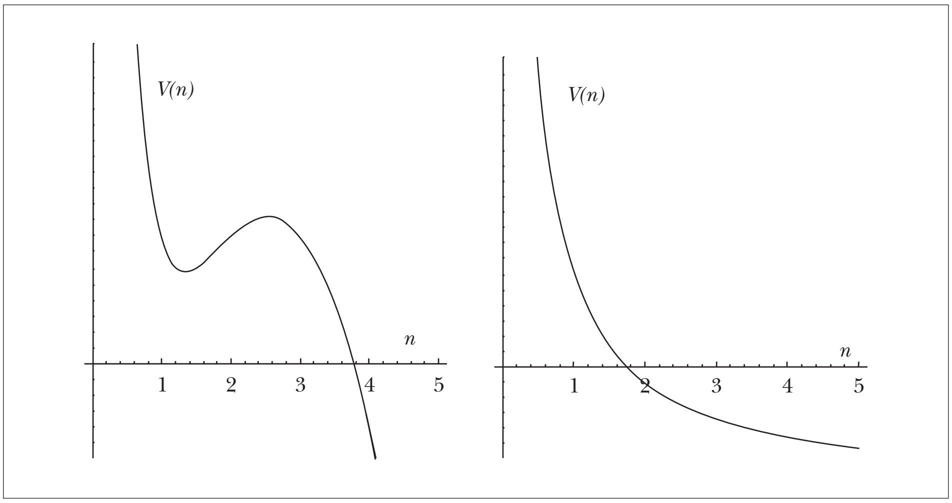
Lema 5. Si $\alpha < \frac{\gamma + \beta(1-\gamma)}{1+2\beta(1-\gamma)}$, $V(n)$ alcanza un máximo global cuando $n \to 0$. Si $A \equiv \dfrac{z(a\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left[\dfrac{(1-\alpha)}{\alpha}[1+2\beta(1-\gamma)] - (1-\gamma)(1+\beta)\right]}{b[\gamma+\beta(1-\gamma)]}$ y

$B \equiv \dfrac{2(a\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}[\gamma - \alpha + \beta(1-\gamma)(1-2\alpha)]}{\alpha b[\gamma+\beta(1-\gamma)]}$ son suficientemente pequeños, entonces $V(n)$ presenta un mínimo local y un máximo local. Si A y B son suficientemente grandes, $V(n)$ es siempre decreciente.

GRÁFICO 5.2*a*: Forma de *V(n)*. Existencia de un máximo global interior



GRÁFICOS 5.2*b* y *c*: Forma de *V(n)*. Casos en que no existe un máximo global interior



6. Descentralización del óptimo

En esta sección se muestra que si existe un máximo global interior, es posible descentralizarlo por medio de una política de pensiones que vincule la pensión recibida al número de hijos.

Si comparamos las condiciones de optimalidad del planificador dadas por el sistema de ecuaciones (5.4) a (5.8) con las condiciones de equilibrio de la economía de libre mercado —(2.10)-(2.14) a (3.1)-(3.4)—, vemos, en primer lugar, que las parejas no tienen en cuenta ni el *efecto de dilución del capital* ni el de *transferencias intergeneracionales* a la hora de decidir el número de hijos que van a tener. Además, el *stock* de capital de equilibrio de la economía competitiva generalmente no estará en la regla de oro. Por tanto, el equilibrio competitivo será normalmente diferente del óptimo social.

Para descentralizar el óptimo, necesitamos un instrumento que consiga que las parejas tengan presentes los dos efectos citados anteriormente en la decisión del número de hijos que van a tener. Al mismo tiempo, este instrumento debería conseguir que la economía alcanzara el nivel de capital de la regla de oro. En este modelo, el instrumento para conseguir estos dos objetivos es un sistema de pensiones de reparto donde solamente se grave el trabajo físico, y las pensiones se distribuyan proporcionalmente a los salarios futuros y al número de hijos. Con esta política de pensiones, las restricciones presupuestarias de las parejas son:

$$c_t + s_t = w_t^p (1 - \tau_t) + w_t^m (2 - z n_t) \tag{6.1}$$

$$d_{t+1} = s_t R_{t+1} + w_{t+1}^p \tau_{t+1} n_t \tag{6.2}$$

donde τ_t es la tasa de cotización a la Seguridad Social impuesta sobre el salario físico. Como puede observarse en (6.2), la fórmula de cálculo de la pensión replica exactamente la restricción presupuestaria del sistema de pensiones de reparto y asegura por tanto el equilibrio financiero del sistema. En efecto, la restricción presupuestaria de un sistema de Seguridad Social de reparto puede expresarse como:

$$p_{t+1}N_t = \tau_{t+1}w^p_{t+1}N_{t+1}$$

donde p_{t+1} es la pensión que recibe una pareja jubilada en el periodo $t + 1$; o equivalentemente:

$$p_{t+1} = \tau_{t+1}w^p_{t+1}n_t$$

siendo n_t el número de hijos que tiene la generación que recibe la pensión en $t + 1$.

Las condiciones de primer orden del programa de maximización de las parejas expresadas en el estado estacionario son:

$$\frac{u_c}{u_d} = \beta R \tag{6.3}$$

$$\frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{u_n}{u_c} = zw^m - \frac{w^p\tau}{R} \tag{6.4}$$

Usando (6.2), (4.16), (4.17) y (4.18), la ecuación (6.4) se puede expresar como:

$$\frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{u_n}{u_c} + \frac{d}{nf_k(k,m)} = zf^m(k,m) + k \tag{6.5}$$

que es equivalente a la CPO del planificador (5.6), teniendo en cuenta (5.5).

Por tanto, hemos visto que esta política de pensiones cumple el primero de los dos objetivos requeridos para descentralizar el óptimo. Nótese que, puesto que la oferta de trabajo físico es inelástica, la financiación de las pensiones mediante un impuesto en este tipo de trabajo no produce ninguna otra distorsión [13]. Por consiguiente, esto sería equivalente al uso de un impuesto de suma fija, que podría implementarse en el caso de que la oferta de trabajo física fuera también endógena en el modelo.

13. Si el trabajo intelectual también pagara cotizaciones al sistema, esto reduciría el coste de oportunidad de los hijos, distorsionando la decisión de fecundidad de otra manera, tal como se verá en la sección 7.

Ahora veremos que esta política también permite corregir las ineficiencias relacionadas con el *stock* de capital. La política propuesta corrige la decisión del número de hijos para cualquier valor de la tasa de cotización. Entonces, el gobierno puede elegir el valor de dicha tasa de modo que se consiga el capital óptimo, cumpliéndose al mismo tiempo la regla de oro. Dado que la asignación individual del consumo a lo largo del ciclo vital es la misma que la óptima, no se requiere ningún instrumento adicional para asignar el consumo óptimamente. Por lo tanto, esta política es el único instrumento requerido para alcanzar el *first best,* tal como se pone de manifiesto en la siguiente proposición:

Proposición 6. Para cada asignación óptima existe un sistema de transferencias (τ *) tal que esta asignación es un equilibrio intertemporal de estado estacionario con previsión perfecta. Esta transferencia satisface:

$$\tau^* = \frac{d^* - k^* n^* f_k(k^*, m^*)}{n^* [f(k^*, m^*) - k^* f_k(k^*, m^*) - m^* f_m(k^*, m^*)]} \tag{6.6}$$

Véase la demostración en el apéndice II.A.

La razón por la cual esta sola política permite alcanzar los dos objetivos mencionados se deriva del hecho de que un sistema de pensiones como el propuesto introduce, en la decisión del número de hijos, los efectos que no están presentes en la economía competitiva. Como puede observarse en (6.2), esta política introduce una relación entre n y d así como entre n y k. En efecto, introduce un vínculo positivo entre el consumo de los ancianos y la decisión del número de hijos —haciendo que los agentes perciban el efecto de transferencias intergeneracionales—. Además, afecta a la acumulación de capital porque introduce otra forma de ahorrar a través de tener hijos. Esto induce a la igualación de las dos tasas de retorno —R y n— y permite internalizar el efecto de dilución del capital. El nivel de la transferencia debe ser tal que el efecto adicional producido en la decisión del número de hijos de las parejas sea exactamente igual a la suma de los dos efectos.

Nótese que la transferencia no tiene por qué ser siempre positiva. Dado que un efecto es positivo —el efecto de transferencias intergeneracionales— y el otro es negativo —el efecto de dilución del capital—, el signo de la transferencia depende del balance de los dos. Un valor negativo de τ implica un mecanismo de transferencias de los ancianos a los jóvenes, que ya no sería un sistema de pensiones. El peso de los dos efectos depende de los parámetros de las funciones de producción y de utilidad.

Este análisis puede interpretarse como una revisión del *teorema de la serendipidad* de Samuelson en un contexto de crecimiento de la población endógeno. En efecto, si la economía alcanza la tasa de crecimiento de la población óptima, se alcanza también automáticamente el capital per cápita óptimo, lo que restaura la optimalidad de la economía, sin necesidad de recurrir a otros instrumentos.

7. Los efectos del sistema actual de pensiones sobre el crecimiento de la población

HASTA ahora, este análisis ha mostrado que una política que vincule las pensiones al número de hijos permite alcanzar tanto el *stock* de capital óptimo como la tasa de crecimiento de la población óptima en un mundo sin distorsiones. Además, esta política parece atractiva porque aísla el sistema de pensiones de las fluctuaciones demográficas, asegurando de esta forma su viabilidad financiera. Sin embargo, hoy en día ya existe en la mayoría de países desarrollados un sistema de pensiones. Aunque en este trabajo no pretendemos analizar la implementación de la política óptima de pensiones que hemos definido anteriormente, ni tampoco diseñar ninguna transición que aumente el bienestar de todas las generaciones implicadas en el cambio, puede que la comparación de la política óptima con la situación presente sugiera algunas ideas sobre cómo debería llevarse a cabo una reforma del sistema. Con este objetivo, en este apartado evaluamos los efectos que el sistema de pensiones existente tiene sobre la tasa de crecimiento de la población.

Cuando el sistema de pensiones exige cotizaciones de todos los salarios, las parejas eligen su senda de consumo y el número de hijos que quieren maximizando su función de utilidad (4.4) sujeta a las siguientes restricciones presupuestarias:

$$c_t + s_t = (1-\tau_t)[w_t^p + w_t^m(2 - zn_t)] \tag{7.1}$$

$$d_{t+1} = R_{t+1}s_t + p_{t+1} \tag{7.2}$$

donde p_{t+1} depende de la fórmula de cálculo de la pensión que define el sistema. Las CPO del problema anterior son en este caso:

$$u_{c,t} = \beta u_{d,t+1} R_{t+1} \tag{7.3}$$

$$\gamma u_{n,t} = (1-\gamma) u_{c,t} \left[z w_t^m (1-\tau_t) - \frac{1}{R_{t+1}} \frac{\partial p_{t+1}}{\partial n_t} \right] \tag{7.4}$$

La condición (7.4) implica que, para determinar su decisión de fecundidad, las parejas igualan la utilidad marginal de tener un hijo a su coste de oportunidad en términos de consumo. Nótese que $\frac{\partial p_{t+1}}{\partial n_t}$ denota el efecto, *tal y como lo perciben los agentes,* de la decisión del número de hijos sobre la pensión que recibirán. Este efecto puede estar o no relacionado con la condición de equilibrio del sistema de reparto, según sea la fórmula de cálculo de las pensiones que esté vigente.

Finalmente, la restricción presupuestaria del sistema de Seguridad Social debe estar en equilibrio en cada periodo, lo que significa que:

$$p_{t+1} = n_t \tau_{t+1} [w_{t+1}^p + w_{t+1}^m (2 - z n_{t+1})] \tag{7.5}$$

Para comparar el estado estacionario óptimo con el de una economía con un sistema de Seguridad Social de reparto, expresamos la CPO de las familias respecto al número de hijos en el estado estacionario como:

$$\frac{\gamma}{(1-\gamma)} \frac{u_n}{u_c} = z f_m(k,m)(1-\tau) - \frac{1}{f_k(k,m)} \frac{\partial p}{\partial n} \tag{7.6}$$

La ecuación (7.6) comparada con la correspondiente del planificador (5.6) muestra que, además de los efectos de dilución del capital y de transferencias intergeneracionales, la decisión del número de hijos puede ser distinta de la óptima en otro aspecto debido a la existencia de un sistema de pensiones. En efecto, la presencia de tal sistema es una fuente potencial de distorsión en la decisión de fecundidad de la pareja. Por un lado, puesto que el salario femenino debe pagar cotizaciones al sistema, el coste de oportunidad de tener hijos se ve reducido en términos de salario neto. Por otro lado, el sistema de Seguridad Social puede tener un efecto adicional según la forma en que la fórmula de cálculo de la pensión esté relacionada con el número de hijos.

Además, aparte de estos efectos directos sobre la decisión de fecundidad, la presencia de un sistema de pensiones produce *efectos de equilibrio general,* reduciendo la acumulación de capital [14], y por tanto afectando también a los precios de los factores a que se enfrentan los individuos. Teniendo en cuenta todos estos efectos, el signo del impacto de un sistema de pensiones de reparto sobre la tasa de crecimiento de la población en el estado estacionario es ambiguo y depende de manera crucial de la fórmula de cálculo de las pensiones así como de las preferencias de las parejas y la forma de la función de producción. A continuación, consideramos un sistema de pensiones específico y analizamos sus efectos sobre la tasa de crecimiento de la población utilizando una función de utilidad y de producción Cobb-Douglas.

En la mayoría de países de la OCDE, el cálculo de las pensiones se realiza a partir de una tasa de reemplazamiento de los salarios pasados del individuo. Esta tasa de reemplazamiento suele depender de la participación laboral, puesto que las pensiones se realizan en función del número de años de contribución al sistema. Además, en muchos países, las reformas del sistema de pensiones tienden a incrementar la proporcionalidad entre años de contribución y nivel de las pensiones. La proporcionalidad total correspondería al llamado sistema bismarckiano, frente al sistema de *Beveridge* que no relaciona la pensión con la participación laboral.

A continuación analizamos los efectos sobre el número de hijos de un sistema de pensiones donde el cálculo de éstas se realiza de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$p_{t+1} = \theta_{t+1}[w_t^p + w_t^m(2 - zn_t)] \tag{7.7}$$

donde θ_{t+1} es la tasa de remplazamiento bruta, de manera que la pensión está relacionada positivamente con la participación laboral femenina y, por tanto, negativamente relacionada con el número de hijos.

Las CPO del problema de maximización de la función de utilidad son en este caso:

$$u_{c,t} = \beta u_{d,t+1} R_{t+1} \tag{7.8}$$

14. Puesto que se reduce la necesidad de ahorrar.

$$\frac{u_{n,t}}{u_{c,t}} = \frac{(1-\gamma)}{\gamma} z w_t^m \left[(1-\tau_t) + \frac{\theta_{t+1}}{R_{t+1}} \right] \tag{7.9}$$

Como puede observarse en la ecuación (7.9), el coste marginal de tener un hijo viene dado por el coste de oportunidad en términos de la pérdida de recursos que ello implica, que es la suma del salario perdido en el primer periodo más la pensión perdida en el segundo periodo por el hecho de trabajar menos al haber tenido el hijo.

Los precios de los factores vienen dados todavía por (4.1), (4.2), (4.3), y las condiciones de equilibrio del mercado de trabajo y de capital por (4.9) y (4.10).

Finalmente, la restricción presupuestaria del sistema de pensiones debe cumplirse año a año y viene dada por la ecuación (7.5) que, teniendo en cuenta (7.7), puede escribirse como:

$$\theta_{t+1}[w_t^p + w_t^m(2 - zn_t)] = n_t \tau_{t+1}[w_{t+1}^p + w_{t+1}^m(2 - zn_{t+1})] \tag{7.10}$$

Definición 7. Supóngase un *stock* de capital inicial k_0 y un sistema de transferencias (τ_t, p_t) que satisface (7.5). Se define un equilibrio intertemporal con previsión perfecta como el vector (c_t, d_t, n_t, s_t, k_t, m_t, w_t^m, w_t^p, R_t) que empieza en k_0 y satisface las condiciones (7.1), (7.2), (7.3), (7.9), (4.1), (4.2), (4.3), (4.9) y (4.10).

En el apéndice II se prueba la existencia y unicidad de tal equilibrio en el caso en que tanto la función de utilidad como la función de producción son Cobb-Douglas.

Las condiciones de primer orden de la maximización de la función de utilidad logarítmica (5.9) expresadas en el estado estacionario resultan:

$$d = \beta R c \tag{7.11}$$

$$n = \frac{(1-\gamma)}{\gamma} \frac{c}{z w^m (1 - \tau + \frac{\theta}{R})} \tag{7.12}$$

La primera ecuación (7.11) junto con las restricciones presupuestarias de los individuos, los precios de los factores, la fórmula de la pensión y la restricción presupuestaria de la Seguridad Social permiten determinar la ecuación de acumulación de capital como:

$$nk = \frac{1}{1+\beta} \left((1-\tau)\beta - \frac{n\tau}{f_k(k,m)} \right) [b + f_m(k,m)(2 - zn)] \tag{7.13}$$

Después de algunas manipulaciones usando (4.1), (4.2), (4.3), (4.10), (7.1), (7.2) y (7.10), la CPO de la familia para la decisión de fecundidad (7.9) es:

$$zn = \frac{\gamma}{1+\beta(1-\gamma)}[2 + b / f_m(k, m)] \tag{7.14}$$

donde b/f_m (k, m) refleja el diferencial de salarios entre el trabajo intelectual y el físico. Como era de esperar, el número de hijos disminuye conforme aumenta el salario del trabajo intelectual, y se reduce el anterior cociente. Estas dos ecuaciones caracterizan completamente el estado estacionario.

En este caso, dado que se cancela el término del coste de oportunidad, el sistema de pensiones no tiene un *efecto directo* sobre la decisión individual de fecundidad, que depende sólo del salario intelectual. Sin embargo, como se ve en (7.13), el sistema de pensiones afecta a la acumulación de capital y, con ello, a la tasa de fecundidad, a través de los efectos de equilibrio general. Para determinar estos efectos es necesario diferenciar totalmente este sistema de ecuaciones. Intuitivamente, el efecto esperado del sistema de pensiones es una reducción del *stock* de capital del estado estacionario debido a la reducción del salario neto y de la necesidad de ahorrar, que a su vez promueve la fecundidad al reducir el salario intelectual. Es fácil demostrar que el efecto de τ sobre k es negativo. Sin embargo, debido a los demás efectos de equilibrio general el efecto total de τ sobre n es ambiguo en términos teóricos.

7.1. Ilustración

Este apartado se dedica a ilustrar los resultados teóricos discutidos anteriormente, con el propósito de comprender mejor su significado. Compararemos los valores de las principales variables económicas en el estado estacionario de la economía perfectamente competitiva, la economía distorsionada por un sistema de reparto como el actual y el *first best.* La motivación de este análisis será ilustrar los efectos del sistema de pensiones actual en diferentes escenarios, e intentar ver si esta situación —que llamaremos el statu quo— se encuentra más cerca del óptimo que la economía perfectamente competitiva.

La primera tabla muestra los valores de los parámetros empleados a lo largo de este ejercicio. Algunos de ellos (β, γ, α) fueron escogidos dentro del rango de valores habitual en la literatura, mientras que los parámetros que afectan a los salarios (*a* y *b*) se ajustan para generar un estado estacionario en que el tipo de interés sea mayor que la tasa de crecimiento de la población, como ocurre en la actualidad. El valor de *z*, fijado en 0,4, implica que tener el quinto hijo fuerza a la mujer a abandonar el mercado laboral. Además, la tasa de cotización al sistema de reparto del statu quo ha sido fijada en un 20%, dentro del rango de los valores que presentan los países de la OCDE.

La segunda tabla muestra los resultados para el caso de función de utilidad y producción Cobb-Douglas. La última fila muestra, en la columna del statu quo, el valor de la tasa de reemplazamiento y, en la columna del planificador, el tipo de cotización óptimo resultante de aplicar la política que descentraliza el *first best* en la economía competitiva.

Parámetros	**Valores**
β	0,5
γ	0,2
α	0,3
a	2,4
b	1
z	0,4

	Ec. competitiva	**Statu quo**	**Planificador**
k	1,24	0,52	0,73
n	0,94	1,01	1,2
R	0,87	1,57	1,2
m	1,61	1,59	1,52
U	0,676	0,615	0,684
θ, τ*	—	0,20	0,14

Lo primero que llama la atención es que el efecto del sistema de reparto actual sobre el número de hijos por familia es positivo. La tasa de fecundidad es mayor en el statu quo que en la economía competitiva sin intervención. Este resultado se mantiene si modificamos el valor de los parámetros dentro de límites razonables.

Comparando con el planificador, la economía de libre mercado se encuentra en una situación de sobreacumulación de capital, mientras que su tasa de crecimiento de la población es demasiado baja. La economía de statu quo también muestra una tasa de fecundidad inferior a la óptima pero, sin embargo, su nivel de capital es inferior al de regla de oro. Nótese que la conclusión con respecto al capital es la misma que hubiéramos obtenido comparando R y n, aunque esta comparación deja de ser relevante en un contexto de crecimiento de la población endógeno. De nuevo, este resultado se mantiene si modificamos el valor de los parámetros, siempre y cuando la transferencia óptima sea positiva ($\tau^* > 0$). Si fuera negativa ($\tau^* < 0$), ocurriría lo contrario.

En resumen, siempre que se requiere una política óptima de transferencias positiva, el *stock* de capital de la economía competitiva está por encima del nivel óptimo, mientras que el de la economía distorsionada por el sistema de pensiones está por debajo del óptimo. Por otro lado, la tasa de fecundidad es inferior a la óptima tanto en la economía de libre mercado como en el statu quo, siendo, sin embargo, mayor en el último caso. Por tanto, en el caso en que $\tau^* > 0$, parece que el statu quo se encuentra más cerca del *first best* que la economía competitiva, si bien esto no es así en términos de utilidad [15].

Aunque el resultado que se refiere al capital es bien conocido, este análisis muestra lo que ocurre con la tasa de crecimiento de la población, proporcionando interesantes aspectos para tener en cuenta en el debate acerca de la reforma del sistema de pensiones. El potencial efecto positivo sobre la tasa de fecundidad de un sistema de reparto que defina las pensiones en proporción a la oferta de trabajo debería considerarse en el diseño de cualquier propuesta de reforma. Además, hay que tener en cuenta que si las pensiones dependen en menor medida de la oferta laboral —esto es, si el sistema es menos bismarckiano— el efecto del sistema sobre el número de hijos sería más positivo. Las propuestas de reforma del sistema de pensiones que sugieren una transición a un sistema de capitalización pueden tener los efectos deseables únicamente sobre el capital, empeorando en muchos casos la distancia hasta la tasa de fecundidad óptima. Además, al pasar a un sistema de capitalizacion el capital podría aumentar por encima del nivel óptimo, cambiando el signo de la distorsión en lugar de solucionarla. Los efectos deseables sobre la tasa de fecundidad únicamente se

15. El motivo es que, dado que el tipo de interés es mayor que n, el sistema de reparto disminuye los recursos de la economía, lo que deja a los agentes con menor utilidad.

pueden alcanzar por medio de una reforma que vincule de algún modo la transferencia recibida al número de hijos. Una posible alternativa es mantener el sistema en su actual estado e introducir ayudas familiares compensatorias —equivalentes al valor actual de la pensión que se recibiría con la política óptima— para acercar la tasa de crecimiento de la población a su valor óptimo [16].

16. Véase Loupias y Wigniolle (2000).

8. La dinámica del modelo

ESTA sección estudia analíticamente la dinámica de la economía competitiva, tanto en el caso de la economía de libre mercado como cuando existe un sistema de pensiones de tipo bismarckiano. En concreto, la economía de libre mercado se estudia como el caso particular en que $\tau = 0$. Nos centramos en el caso en que la utilidad es logarítmica y la función de producción es Cobb-Douglas, para el que es posible derivar analíticamente la dinámica.

La función de producción en términos por familia viene dada por (5.10).

Los precios de los factores son:

$$w_t^p = b \tag{8.1}$$

$$w_t^m = (1-\alpha)\, a\, k_t^{\alpha} m_t^{-\alpha} \tag{8.2}$$

$$1 + r_t = R_t = \alpha\, a\, k_t^{\alpha-1} m_t^{1-\alpha} \tag{8.3}$$

Con la función de utilidad logarítmica (5.9), la condición de primer orden del programa de maximización con respecto al consumo (7.8) junto con las restricciones presupuestarias (7.1) y (7.2) permiten escribir la siguiente función de ahorro:

$$s_t = \frac{1}{1+\beta}\left(\beta(1-\tau) - \frac{\theta_{t+1}}{R_{t+1}}\right)[w_t^p + w_t^m(2 - zn_t)] \tag{8.4}$$

mientras que la CPO relativa al número de hijos (7.9) determina el tiempo que las mujeres dedican a los hijos:

$$zn_t = \min\left[1, \frac{\gamma}{1+\beta(1-\gamma)}\left(\frac{w_t^p}{w_t^m} + 2\right)\right] \tag{8.5}$$

siendo $0 \leq zn_t \leq 1$. La función de utilidad logarítmica asegura que zn_t sea positivo, pero la decisión de fecundidad queda restringida por el tiempo máximo de que dispone la mujer (una unidad). Como se puede ver en (8.5), en la medida en que el salario relativo del trabajo intelectual se mantenga bajo, la mujer dedicará todo su tiempo a tener hijos. Conforme la ratio entre el salario físico y el intelectual disminuye, la mujer dedica una parte creciente de su tiempo a trabajar, reduciendo, por tanto, el número de hijos que tiene.

Nótese que $\gamma < \frac{1}{2}$ implica que $\frac{\gamma}{1+\beta(1-\gamma)} < \frac{1}{2}$ y con ello se garantiza que la mujer empezará a trabajar en cuanto su salario relativo alcance cierto nivel. Como hemos visto anteriormente, en el caso particular de esta función de utilidad el efecto del coste de oportunidad se cancela y el sistema de pensiones no tiene ningún efecto *directo* sobre la decisión de fecundidad de las parejas. La ecuación (8.5) es, por tanto, idéntica en el caso en que $\tau = 0$.

En presencia de un sistema de pensiones de tipo bismarckiano, la restricción presupuestaria del mismo viene dada por (7.10) y debe cumplirse cada periodo. A partir de ahora supondremos que el tipo de cotización es fijo ($\tau_t = \tau_{t+1} = \tau$) y que es la tasa de reemplazamiento (θ_{t+1}) la que se ajusta con el fin de equilibrar el presupuesto anual (es decir, tenemos un sistema de contribución definida).

Sustituyendo (8.1), (8.2) y (4.10) en (8.5), el tiempo dedicado a cuidar a los hijos viene dado por:

$$zn_t = \min\left[1, \frac{\gamma}{1+\beta(1-\gamma)}\left(\frac{b(2-zn_t)^{\alpha}}{ak_t^{\alpha}(1-\alpha)}+2\right)\right] \tag{8.6}$$

Si $zn_t < 1$, el tiempo dedicado a cuidar a los hijos viene definido por la siguiente función implícita:

$$H(zn_t, k_t) \equiv zn_t - \frac{\gamma}{1+\beta(1-\gamma)}\left(\frac{b(2-zn_t)^{\alpha}}{ak_t^{\alpha}(1-\alpha)}+2\right) = 0 \tag{8.7}$$

Dado que $\frac{\partial H(zn_t, k_t)}{\partial zn_t} > 0$, existe una función $\Phi(k_t)$ tal que:

$$zn_t = \Phi(k_t)$$

con

$$\frac{d\Phi(k_t)}{dk_t} = -\frac{(2 - zn_t)}{k_t\left(1 + \frac{1+\beta(1-\gamma)}{\gamma}\frac{a}{b}\frac{1-\alpha}{\alpha}(2 - zn_t)^{1-\alpha}k_t^{\alpha}\right)} < 0 \qquad (8.8)$$

Conforme se acumula capital, el salario del trabajo intelectual aumenta y el número de hijos decrece. Por tanto, cualquier cambio en el sistema de pensiones que reduzca la acumulación de capital contribuirá a aumentar el número de hijos al reducir el salario del trabajo intelectual.

Dado que $\frac{d\Phi(k_t)}{dk_t} < 0$ y $zn_t \leq 1$, $zn_t = 1$ si y sólo si $k_t \leq$ k*, con

k* = Φ^{-1} (1)

Por tanto,

$$zn_t = \begin{cases} 1 & \text{si } k_t \leq k^* \\ \Phi(k_t) & \text{si } k_t \geq k^* \end{cases}$$

La acumulación de capital viene dada por:

$n_t k_{t+1} = s_t$

Sustituyendo (8.4) y (8.5) en la expresión previa da:

$$k_{t+1} \begin{cases} \frac{z}{1+\beta}\left(\beta(1-\tau) - \frac{\theta_{t+1}}{R_{t+1}}\right)(w_t^p + w_t^m) & \text{si } k_t \leq k^* \\ \frac{1-\gamma}{\gamma} z\left(\beta(1-\tau) - \frac{\theta_{t+1}}{R_{t+1}}\right)w_t^m & \text{si } k_t \geq k^* \end{cases} \qquad (8.9)$$

Nótese que, si $k_t = k^*$, las dos expresiones dan el mismo valor. En efecto, si $k_t = k^*$, a partir de (8.5), sabemos que $\frac{w_t^p}{w_t^w} = \frac{1+\beta(1-\gamma)}{\gamma} - 2$, y por tanto $\frac{1-\gamma}{\gamma} z\, w_t^m = \frac{z}{1+\beta}(w_t^p + w_t^m)$. Como se observa claramente en esta expresión, un aumento de la escala del sistema de pensiones tiene un efecto negativo sobre la acumulación de capital que actúa por dos canales: reduce la renta disponible y desincentiva el ahorro, al ofrecer mayores recursos en el futuro (aumenta la tasa de reemplazamiento θ_{t+1}).

Proposición 8. La acumulación de capital descrita por (8.9) se caracteriza por al menos un estado estacionario no trivial.

Véase la demostración en el apéndice II.B.

Proposición 9. No existe ningún estado estacionario para $k_t < k^*$ si a $< \frac{2}{\alpha}$ y si $(k^*) > k^*$.

La demostración se halla en el apéndice II.C.

Proposición 10. Si las condiciones de la definición 9 se cumplen, la dinámica de esta economía se caracteriza por un estado estacionario único con capital k^-, siendo $k^- > k^*$.

Véase la demostración en el apéndice II.D.

8.1. Ilustración de la dinámica

En este apartado mostramos una ilustración de la dinámica de la economía competitiva con el objeto de mostrar un ejemplo de la transición demográfica que produce el modelo. Para ello procedemos del siguiente modo. Empleando los mismos parámetros que en la ilustración del estado estacionario de la sección 7, simulamos un *shock* temporal en la economía que reduce el *stock* de capital (al 14% de su valor de estado estacionario) y obtenemos la correspondiente evolución del capital y la tasa de fecundidad durante la transición hacia el estado estacionario.

Los gráficos resultantes pueden verse en el gráfico 8.1. De acuerdo con el análisis teórico, se observa que la tasa de crecimiento de la población disminuye conforme se acumula capital. Esto es debido al aumento del salario del trabajo intelectual en relación al salario del trabajo físico, que produce un aumento del coste de oportunidad de los hijos con relación a la renta familiar.

Por este motivo, la mujer ofrece más trabajo, lo cual permite que crezca la producción, reforzando así la acumulación de capital.

GRÁFICO 8.1*a*: Comparación entre la economía perfectamente competitiva y la economía con un sistema de pensiones bismarckiano. Acumulación de capital

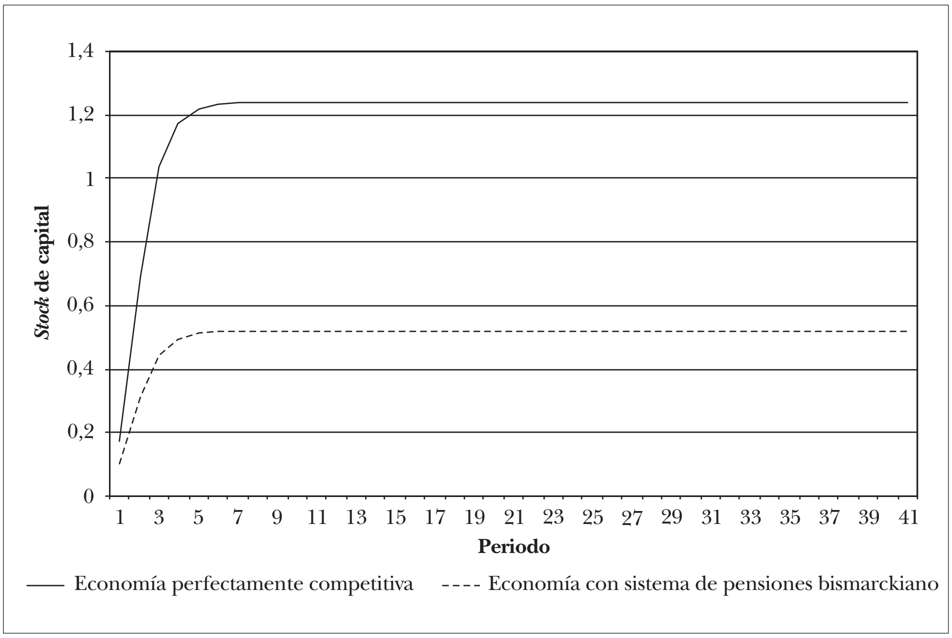
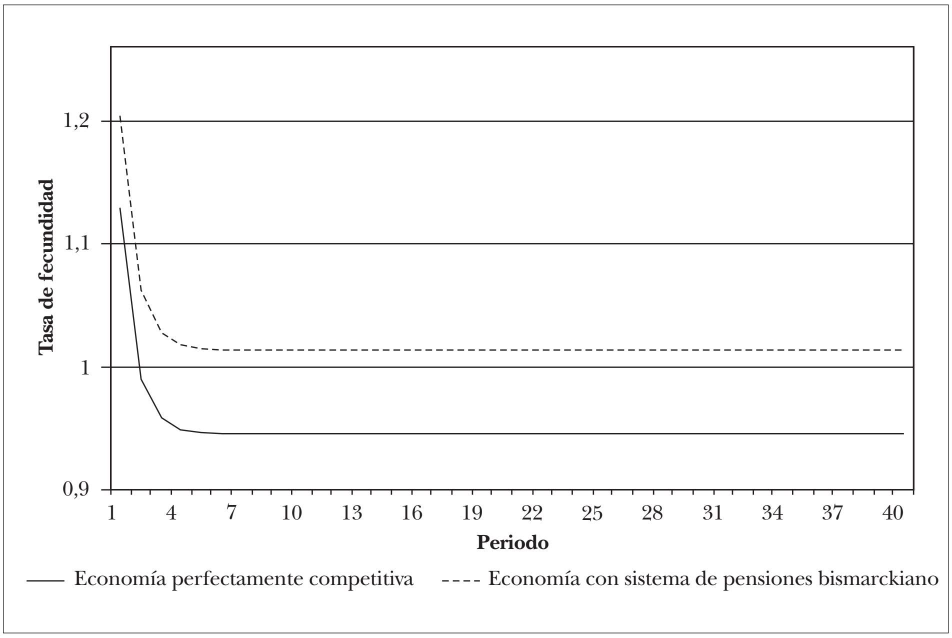


GRÁFICO 8.1*b*: Comparación entre la economía perfectamente competitiva y la economía con un sistema de pensiones bismarckiano. Transición demográfica



Apéndice II

A.II.A. Demostración de la proposición 6: descentralización de la asignación del *first best*

Para demostrar que la política propuesta descentraliza el óptimo social, mostraremos que las ecuaciones que definen la solución de estado estacionario de la economía en que se introduce este instrumento coinciden con las que definen el *first best*.

Las CPO que reflejan la asignación intertemporal óptima del consumo se pueden expresar en ambos casos como:

$$\frac{u_c}{u_d} = \beta f_k(k, m)$$

usando (5.5) en el caso del planificador y el precio del capital en la economía descentralizada.

La condición de equilibrio del mercado de trabajo es, también, la misma en ambos casos:

$$m = 2 - zn$$

La restricción presupuestaria de la familia en el primer periodo puede expresarse como la restricción de recursos a que se enfrenta el planificador. Para ello, se aísla τ en la restricción presupuestaria del segundo periodo y se sustituye en la restricción del primer periodo. Usando además la condición de equilibrio del mercado de trabajo se obtiene:

$$c + kn = w^p - \frac{d}{n} + kR + w^m(2 - zn)$$

Sustituyendo las CPO de la empresa que determinan los precios de los factores, y la condición de equilibrio del mercado de trabajo, la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$c + kn = f(k, m) - kf_k(k, m) - mf_m(k, m) - \frac{d}{n} + kf_k(k, m) + mf_m(k, m)$$

que es idéntica a la restricción de recursos de la economía (5.7).

Hemos visto también, en la ecuación (6.5), cómo la CPO de las familias con respecto a n puede expresarse igual que la de la economía centralizada. Por tanto, la única ecuación que puede diferir en las dos soluciones es la regla de oro del planificador, que no tiene por qué satisfacerse en la economía descentralizada. No obstante, el valor de τ de la ecuación (6.6) es el que hace que la tasa de fecundidad se iguale al producto marginal del capital en la economía descentralizada. Este valor de τ puede hallarse usando las ecuaciones (4.16) y (4.17) después de aislar τ en la restricción presupuestaria del individuo del segundo periodo. Aplicando este tipo de cotización óptimo τ^* se logra que todas las variables de la economía descentralizada sean iguales a las que escogería el planificador.

A.II.B. Demostración de la proposición 8: existencia de un estado estacionario no trivial

Sustituyendo (8.1), (8.2), (8.3), (7.10) y (8.5) en (8.9), la evolución del *stock* de capital viene dada por la siguiente función implícita:

$$G(k_{t+1}, k_t) \equiv \Omega\ (k_{t+1}) - \Psi\ (k_t) = 0$$

donde

$$\Omega(k_{t+1}) = \begin{cases} \left[k_{t+1} + \dfrac{1-\alpha}{\alpha}\dfrac{\tau}{1+\beta} k_{t+1} + \dfrac{\tau}{1+\beta}\dfrac{b}{a\alpha} k_{t+1}^{1-\alpha} \right] & \text{si}\, k_t \leq k^* \\ \left[\begin{array}{l} k_{t+1} + 2\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\tau \dfrac{1-\gamma}{1+\beta(1-\gamma)}\dfrac{k_{t+1}}{2-\Phi(k_{t+1})} + \\ +\tau \dfrac{1-\gamma}{1+\beta(1-\gamma)}\dfrac{b}{a\alpha}\left(\dfrac{k_{t+1}}{2-\Phi(k_{t+1})}\right)^{1-\alpha} \end{array} \right] & \text{si}\ k_t \geq k^* \end{cases} \tag{A.II.1}$$

y

$$\Psi(k_t) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{1+\beta} z(1-\tau)(1-\alpha) a k_t^{\alpha} + z(1-\tau)\dfrac{\beta}{1+\beta} b & \text{si}\, k_t \leq k^* \\ \beta\dfrac{1-\gamma}{\gamma} z(1-\tau)(1-\alpha) a \left(\dfrac{k_t}{(2-\Phi(k_t))}\right)^{\alpha} & \text{si}\, k_t \geq k^* \end{cases} \tag{A.II.2}$$

Usando (8.8), es sencillo ver que:

$$\frac{d\left(\dfrac{k}{2-\Phi(k_t)}\right)}{dk_t} = \frac{2-\Phi(k_t)+k_t\,\dfrac{d\Phi(k_t)}{dk_t}}{(2-\Phi(k_t))^2} > 0$$

y, por tanto,

$$\frac{\partial\Omega(k_{t+1})}{\partial k_{t+1}} > 0 \qquad \forall k_{t+1}$$

En consecuencia, la evolución del capital puede expresarse como:

$$k_{t+1} = \psi\,(k_t)$$

con

$$\frac{d\psi(k_t)}{dk_t} = \frac{dk_{t+1}}{dk_t} = \frac{\dfrac{\partial\Psi(k_t)}{\partial k_t}}{\dfrac{\partial\Omega(k_{t+1})}{\partial k_{t+1}}} > 0 \qquad \forall k_t,\, k_{k+1} \tag{A.II.3}$$

Además, a partir de (8.8) y (A.II.2), podemos deducir que:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\partial\psi(k_t)}{\partial k_t}=0$$

que, junto con $\Omega(0) = 0$, $\Psi(0) > 0$ y $\dfrac{\partial\Omega(k_{t+1})}{\partial k_{t+1}} > 0$ asegura la existencia de un estado estacionario no trivial:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{d\psi(k_t)}{dk_t}=0$$

A.II.C. Demostración de la proposición 9

Cuando $\tau > 0$, empleando (A.II.1), (A.II.2) y (A.II.3), se puede mostrar que la función $\psi(k_t)$ es cóncava cuando $k_t \leq k^*$ bajo la condición suficiente
$a < \dfrac{2}{\alpha}$.

Cuando $k_t \leq k^*$ (y por tanto $zn_t = 1$), $\psi(k_t)$ es cóncava si su pendiente es decreciente, es decir, si y sólo si:

$$\frac{d^2\psi(k_t)}{(dk_t)^2} = \frac{\frac{\partial^2\Psi(k_t)}{(\partial k_t)^2}\frac{\partial\Omega(k_{t+1})}{\partial k_{t+1}} - \frac{\partial\Psi(k_t)}{\partial k_t}\frac{\partial^2\Omega(k_{t+1})}{(\partial k_{t+1})^2}\frac{\frac{\partial\Psi(k_t)}{\partial k_t}}{\frac{\partial\Omega(k_{t+1})}{\partial k_{t+1}}}}{\left(\frac{\partial\Omega(k_{t+1})}{\partial k_{t+1}}\right)^2} < 0$$

Ello ocurrirá si y sólo si:

$$-\frac{\frac{\partial^2\Psi(k_t)}{(\partial k_t)^2}}{\left(\frac{\partial\Psi(k_t)}{\partial k_t}\right)^2} > -\frac{\frac{\partial^2\Omega(k_{t+1})}{(\partial k_{t+1})^2}}{\left(\frac{\partial\Omega(k_{t+1})}{\partial k_{t+1}}\right)^2}$$

Dado que $\frac{\partial\Omega(k_{t+1})}{\partial k_{t+1}} > 1$, una condición suficiente es que:

$$-\frac{\frac{\partial^2\Psi(k_t)}{(\partial k_t)^2}}{\left(\frac{\partial\Psi(k_t)}{\partial k_t}\right)^2} > -\frac{\frac{\partial^2\Omega(k_{t+1})}{(\partial k_{t+1})^2}}{\frac{\partial\Omega(k_{t+1})}{\partial k_{t+1}}}$$

Usando (A.II.1), (A.II.2) y (A.II.3), esta condición se transforma en:

$$\frac{1+\beta}{\beta}\frac{1}{z(1-\tau)a\alpha} > \frac{k_t^{\alpha}}{k_{t+1}}\frac{1}{\left[\frac{1}{\alpha} + k_{t+1}^{\alpha}\frac{a}{b}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}\frac{1+\beta}{\tau}\right)\right]}$$

Dado que $\frac{d\psi(k_t)}{dk_t} > 0$ y $\left[\frac{1}{\alpha} + k_{t+1}^{\alpha}\frac{a}{b}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}\frac{1+\beta}{\tau}\right)\right] > 1$, esta condición se cumplirá si:

$$\frac{1+\beta}{\beta}\frac{1}{z(1-\tau)a\alpha} > 1$$

Sabiendo que $z < 1$, $\tau < 1$ y $0 \leq \beta \leq 1$, una condición suficiente para que la función $\psi(k_t)$ sea cóncava $\forall\ z, \tau, \beta$ es:

$$a < \frac{2}{\alpha}$$

Cuando $\tau = 0$, la evolución del *stock* de capital cuando $k_t < k^*$ queda definida simplemente por:

$$k_{t+1} = \psi(k_t) = \frac{\beta}{a+\beta} z[b + (1-\alpha)ak_t^{\alpha}]$$

siendo trivial comprobar que $\Psi(k_t)$ es cóncava.

Si la función $\psi(k_t)$ es cóncava cuando $k_t < k^*$, no existe ningún estado estacionario para $k_t < k^*$ si:

$$\psi(k^*) > k^*$$

puesto que $\psi(k_t)$ no corta nunca la línea de 45° en todo su rango ($k_t < k^*$).

A.II.D. Demostración de la proposición 10: unicidad del estado estacionario

Combinando (8.6) y (8.9), junto con (8.1), (8.2), (8.3), (7.10) y (4.10), el capital de estado estacionario cuando $k_t > k^*$ queda definido por las dos ecuaciones siguientes:

$$k = \frac{1-\gamma}{\gamma} z\beta(1-\tau)(1-\alpha)a \frac{k^{\alpha}}{(2-zn)^{\alpha}} - \tau \frac{\gamma}{1+\beta(1-\gamma)} \frac{b}{za\alpha} \frac{k^{1-\alpha}}{(2-zn)^{1-\alpha}} - \\ - \frac{\tau\gamma}{a+\beta(1-\gamma)} \frac{2}{z} \frac{k}{2-zn} \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

$$(2-zn) + \frac{(2-zn)^{\alpha}}{k^{\alpha}} \left[\frac{b}{a(1-\alpha)} \frac{\gamma}{1+\beta(1-\gamma)} \right] = 2\left(1 - \frac{\gamma}{1+\beta(1-\gamma)}\right)$$

Sustituyendo la segunda expresión en la primera y manipulando los términos, el sistema anterior puede escribirse como:

$$k = f_1\ (zn) \equiv \beta\ (\ 1 - \tau)\ zb \frac{\gamma}{1+\beta(1-\gamma)}.$$

$$\frac{1}{\left[2\left(1-\frac{\gamma}{1+\beta(1-\gamma)}\right)-(2-zn)\right]\left[\frac{\gamma}{1-\gamma}-\frac{1-\alpha}{\alpha}\tau+2\frac{\tau}{2-zn}\frac{1-\alpha}{\alpha}\right]}$$

$$k = f_2\,(zn) \equiv (2-zn)\,\frac{\left[\frac{b}{a(1-\alpha)}\frac{\gamma}{1+\beta(1-\gamma)}\right]^{1/\alpha}}{\left[2\left(1-\frac{\gamma}{1+\beta(1-\gamma)}\right)-(2-zn)\right]^{1/\alpha}}$$

Si el sistema de pensiones no existe ($\tau = 0$), la dinámica del capital (primera ecuación) queda descrita simplemente por:

$$\beta z b\,\frac{1-\gamma}{1+\beta(1-\gamma)}\,\frac{1}{\left[2\left(1-\frac{\gamma}{1+\beta(1-\gamma)}\right)-(2-zn)\right]}$$

Las dos ecuaciones son función únicamente de k y n. El estado estacionario queda entonces definido por la intersección entre ambas ecuaciones. A continuación demostramos que tanto f_1 como f_2 son decrecientes y estrictamente convexas en zn (si se cumple la condición suficiente $\tau < \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\gamma}{1-\gamma}$), de manera que estas ecuaciones se cruzan sólo una vez y el estado estacionario de la dinámica es, por tanto, único.

En efecto,

$$\frac{\partial f_1}{\partial n} = \beta(1-\tau)z^2 b\,\frac{\gamma}{1+\beta(1-\gamma)}.$$

$$\cdot\,\frac{-\left[\frac{\tau}{(2-zn)^2}4\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(1-\frac{\gamma}{1+\beta(1-\gamma)}\right)+\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}-\frac{1-\alpha}{\alpha}\tau\right)\right]}{\left[2\left(1-\frac{\gamma}{1+\beta(1-\gamma)}\right)-(2-zn)\right]^2\left[\frac{\gamma}{1-\gamma}-\frac{1-\alpha}{\alpha}\tau+2\frac{\tau}{2-zn}\frac{1-\alpha}{\alpha}\right]^2} < 0$$

o, para $\tau = 0$,

$$\frac{\partial f_1}{\partial n} = -\beta z^2 b\,\frac{1-\gamma}{1+\beta(1-\gamma)}\,\frac{1}{\left[2\left(1-\frac{\gamma}{1+\beta(1-\gamma)}\right)-(2-zn)\right]^2} < 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial n} = -z\left[\frac{b}{a(1-\alpha)}\frac{\gamma}{1+\beta(1-\gamma)}\right]^{1/\alpha}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{1}{\left[2\left(1-\frac{\gamma}{1+\beta(1-\gamma)}\right)-(2-zn)\right]^{1/\alpha}}+\frac{1}{\alpha}\frac{2-zn}{\left[2\left(1-\frac{\gamma}{1+\beta(1-\gamma)}\right)-(2-zn)\right]^{1/\alpha+1}}\right]<0$$

Además, tras alguna manipulación, se puede mostrar que las segundas derivadas son ambas positivas:

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial^2 zn} = \frac{-2\beta(1-\tau)z^3 b\frac{\gamma}{1+\beta(1-\gamma)}}{\left[2\left(1-\frac{\gamma}{1+\beta(1-\gamma)}\right)-(2-zn)\right]^3\left[\frac{\gamma}{1-\gamma}-\frac{1-\alpha}{\alpha}\tau+2\frac{\tau}{2-zn}\frac{1-\alpha}{\alpha}\right]^3}\cdot$$

$$\cdot\left[\begin{array}{c}-\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}-\frac{1-\alpha}{\alpha}\tau\right)^2+2\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}-\frac{1-\alpha}{\alpha}\tau\right)X\left(-1+\frac{1-\frac{\gamma}{1+\beta(1-\gamma)}}{2-zn}\right)\\ -X\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}-\frac{1-\alpha}{\alpha}\tau+2\frac{\tau}{2-zn}\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\end{array}\right]>0$$

con

$$X = 4\frac{\tau}{(2-zn)^2}\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(1-\frac{\gamma}{1-\beta(1-\gamma)}\right) > 0$$

o cuando $\tau = 0$,

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial^2 zn} = 2\beta z^3 b\frac{1-\gamma}{1+\beta(1-\gamma)}\frac{1}{\left[2\left(1-\frac{\gamma}{1+\beta(1-\gamma)}\right)-(2-zn)\right]^3} > 0$$

y

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial^2 zn} = z^2\left[\frac{b}{a(1-\alpha)}\frac{\gamma}{1+\beta(1-\gamma)}\right]^{1/\alpha}$$

$$\left[\frac{\dfrac{2}{\alpha}}{\left[2\left(1-\dfrac{\gamma}{1+\beta(1-\gamma)}\right)-(2-zn)\right]^{1/\alpha+1}}+\frac{\dfrac{1}{\alpha}(2-zn)(\dfrac{1}{\alpha}+1)}{\left[2\left(1-\dfrac{\gamma}{1+\beta(1-\gamma)}\right)-(2-zn)\right]^{1/\alpha+2}}\right]>0$$

Conclusiones

En este estudio hemos abordado la problemática referente a la crisis del sistema de pensiones debida al envejecimiento de la población. El punto de partida del análisis es la observación de que la causa fundamental de la crisis financiera del sistema es el modo en que se establece el derecho a recibir la pensión —su fórmula de cálculo—. En efecto, aunque la restricción presupuestaria del sistema de reparto requeriría que la pensión fuera proporcional a la tasa de crecimiento de la población y de la productividad, en la mayoría de los sistemas de pensiones actuales no hay ninguna conexión entre el monto de la pensión que reciben los individuos y el número de hijos que tienen.

Para este análisis se emplean dos modelos teóricos de generaciones solapadas. Ambos modelos consideran el número de hijos como una variable endógena con el fin de analizar los vínculos entre el sistema de pensiones y la tasa de crecimiento de la población. El primer modelo introduce únicamente un coste monetario fijo por hijo. Ello permite analizar las implicaciones de que exista heterogeneidad en las preferencias con respecto a los hijos. El segundo modelo, más complejo, introduce el coste de los hijos en términos de tiempo. Con ello es posible analizar la interacción entre la oferta de trabajo y la fecundidad y, al mismo tiempo, producir una transición demográfica endógena. En ambos modelos se introduce una política de pensiones que establece un vínculo entre el número de hijos y la pensión recibida. Se observa que, además de restaurar el equilibrio financiero del sistema, esta política hace posible que la economía alcance tanto el nivel de capital como la tasa de crecimiento de la población óptima.

El modo en que la política debe ser implementada es diferente en cada modelo. En el primer caso, en que los agentes tienen distintas preferencias con respecto a los hijos, la política de pensiones óptima debería utilizar la pensión para retornar a los agentes que tienen hijos la parte de coste de éstos no compensada por la utilidad que reportan. En el segundo caso, se concluye que el tipo de cotización no debería gravar la oferta de trabajo femenina, ya que ello distorsionaría la oferta de trabajo.

Los recursos financieros del sistema deberían provenir de factores de producción ofrecidos inelásticamente (el trabajo físico de los hombres en el modelo) o de impuestos fijos aplicados a toda la población.

En la segunda parte del estudio se analizan también los efectos sobre la fecundidad de un sistema de pensiones que define la pensión como un porcentaje (tasa de reemplazamiento) del salario individual (sistema bismarckiano), sin tener en cuenta la fecundidad de los individuos. Esta situación viene a representar el statu quo —la situación de partida— de las reformas actuales propuestas en los países desarrollados. Se compara esta situación con una economía de libre mercado sin sistema de pensiones de ningún tipo. Se observa, por medio de una ilustración, que en los casos en que la economía competitiva necesita de la política de pensiones óptima propuesta (τ^* es positivo), el nivel de capital de la economía competitiva está por encima del óptimo, mientras que en el statu quo está por debajo. Por contra, la tasa de fecundidad es inferior a la óptima tanto en la economía competitiva como en el statu quo, siendo en este último caso mayor. Es decir, la tasa de crecimiento de la población del statu quo podría encontrarse entre la de la economía competitiva y la óptima. Por tanto, parece que el statu quo puede estar más cerca del *first best* —aunque no en términos de utilidad—. Aunque el resultado referente al capital —la posibilidad de *sub* o sobreacumulación— es conocido en la literatura, nuestro análisis arroja alguna luz sobre los posibles efectos positivos de un sistema de pensiones de tipo bismarckiano sobre la fecundidad, que deben ser considerados a la hora de diseñar la reforma del sistema. Las propuestas de reforma que sugieren una transición a un sistema de capitalización podrían producir los efectos deseados sobre el capital, empeorando, sin embargo, la distancia respecto a la tasa óptima de crecimiento de la población. Además, el capital podría aumentar más allá de su valor óptimo, cambiando el signo de la ineficiencia en lugar de solucionarla. En resumen, para alcanzar los efectos deseables sobre la fecundidad sería necesario vincular de algún modo la pensión con la fecundidad.

De los resultados anteriores no debería concluirse que exista una tasa de crecimiento óptima de la población que debe alcanzar cada sociedad. Fundamentalmente, el análisis nos indica que, además de eliminar la dependencia demográfica de las finanzas del sistema de pensiones de reparto, la política propuesta podría tener efectos positivos sobre el bienestar.

Asimismo hay que tener en cuenta que nos hemos centrado en el estudio de la solución de estado estacionario, pero no hemos abordado el análisis de la existencia de una posible transición a otro sistema, que pueda mejorar el bienestar de los agentes económicos. Aunque esta cuestión queda fuera del alcance de este trabajo, el análisis realizado proporciona algunas recomendaciones de cara a la reforma del sistema de pensiones. La primera cuestión que se debe considerar es que, para evitar perjudicar a las generaciones iniciales de la transición, sería necesario respetar los derechos adquiridos, es decir, aplicar la política a los hogares que se encuentran al inicio de su época fértil en el momento de anunciar la política. Con ello, la estabilidad financiera del sistema se alcanzaría únicamente cuando estas generaciones llegaran al retiro. Entretanto se produciría, lógicamente, un *gap* entre las cotizaciones y las prestaciones. Sin embargo, esta brecha podría ser inferior a la producida en ausencia de la política propuesta ya que el incentivo para aumentar la fecundidad podría reducir la dureza de la transición demográfica. Es más, dado que esta situación sería ya sólo temporal, cabría la posibilidad de evitar el recorte de las pensiones o el aumento de las cotizaciones durante el periodo transitorio por medio de la emisión de deuda.

Por otra parte, si los agentes no son totalmente racionales y/o existen restricciones de liquidez, cabría argumentar que sería más efectivo introducir la política como una reducción del tipo impositivo durante el periodo laboral, en que, además, se tienen los hijos. En Alemania se empezaron a introducir en 1986 medidas de este tipo (Weikard, 2000). No obstante, hay que tener en cuenta que con esta medida el sistema perdería su naturaleza de reparto, ya que la pensión de los padres ya no se financiaría directamente con las cotizaciones de los hijos. Alternativamente cabría dejar el sistema de reparto en su actual forma, complementándolo con un sistema de ayudas familiares, como plantean Loupias y Wigniolle (2000). Asimismo, Sinn (1997) propone una transición parcial a un sistema híbrido —que combine reparto y capitalización— que podría implementarse vinculando la pensión de reparto recibida a las cotizaciones de los hijos, o reduciendo las contribuciones al sistema de reparto de los que tienen hijos —los cuales contribuyen de forma no monetaria—. Nótese que todas estas propuestas tienen la virtualidad de que abordan el problema de la transición considerando no sólo las diferencias intergeneracionales en la fecundidad, sino también las diferencias intrageneracionales en esta variable.

Además de estas consideraciones generales, cabe resaltar la favorable coyuntura en que se encuentra el sistema de pensiones español en el momento actual. Como se dijo en la introducción, las previsiones muestran que, si se mantiene la actual mejora del empleo, el sistema de pensiones contributivo español —aislado gracias a la racionalización financiera promovida por la Ley 24/1997— obtendrá superávit en los próximos 15 o 20 años. Esta situación no debe relajar la preocupación por la viabilidad del sistema, sino que es necesario articular el modo en que estos superávits estimados se trasladarán al futuro para financiar los déficits previstos durante la jubilación del *baby-boom*.

Cabe plantearse, entonces, si conviene que se constituya un fondo público o si estos superávits deben ser trasladados a las familias de modo que éstas los acumulen. En este contexto, invertir en las familias parece ser un buen remedio para evitar que se agraven los problemas asociados al envejecimiento de la población; más si consideramos que los niños nacidos en los próximos años se incorporarán al mercado de trabajo precisamente cuando el sistema de pensiones entre en crisis —cuando la tasa de dependencia empiece a subir drásticamente—. De hecho, una asignatura pendiente en la agenda política española es llevar la política familiar a los estándares europeos.

Bibliografía

ABÍO, G. *et al.* (1999): «El impacto intergeneracional de la reforma de las pensiones en España: un enfoque de Contabilidad Generacional», *Cuadernos Económicos del ICE,* vol. II, núm. 64, 101-116.

BECKER, G. S., K. MURPHY y R. TAMURA (1990): «Human capital, fertility, and economic growth», *Journal of Political Economy,* 98 (5), part. 2, S12-S37.

BENTAL, B. (1989): «The old age security hypothesis and optimal population growth», *Journal of Population Economics,* 1, 285-301.

BONIN, H., J. GIL y C. PATXOT (1999): «Beyond the Toledo Agreement: the intergenerational impact of the Spanish pension reform», *Spanish Economic Review,* vol. 3/2, 111-130.

CIGNO, A. (1993): «Intergenerational transfers without altruism», *European Journal of Political Economy,* 9, 505-518.

DE LA CROIX, D. y P. MICHEL (2000): «A theory of capital accumulation: dynamics and policy in overlapping generations», Cambridge University Press, [próxima publicación].

DEARDORFF, A. V. (1976): «The optimum growth rate for population: comment», *International Economic Review,* 17, 510-515.

DIAMOND, P. A. (1965): «National debt in a neoclassical growth model», *American Economic Review,* 55, núm. 5, 1126-1150.

ECKSTEIN, Z. y K. I. WOLPIN (1985): «Endogenous fertility and optimal population size», *Journal of Public Economics,* 27, 93-106.

FUNDACIÓN BBV (1997): «Pensiones y prestaciones por desempleo», 2.ª ed., Fundación BBV.

GALOR, O. y D. N. WEIL (1996): «The gender gap, fertility and growth», *American Economic Review,* vol. 86, núm. 3, 374-387.

— y D. N. WEIL (2000): «Population, technology and growth: from the Malthusian regime to the demographic transition», *American Economic Review,* vol. 90, núm. 4, 806-828.

GIL, J. y C. PATXOT (2000): «La revisión de la Ley de Reforma del Sistema de Seguridad Social: una aproximación de contabilidad generacional», *Hacienda Pública Española, monografía 2000: Las Pensiones en España,* 55-68.

GIMENO, J. F. y O. LICANDRO (1999): «El equilibrio financiero de un sistema de reparto de jubilación: una aplicación al caso español», *Investigaciones Económicas,* vol. XXIII (1), 129-143.

HERCE, J. A. y J. ALONSO (1998): «Los efectos económicos de la Ley de Consolidación de la Seguridad Social: perspectivas financieras del sistema de pensiones tras su entrada en vigor», Documento de Trabajo 1998-16 FEDEA.

— y J. ALONSO (2000): «La reforma de les pensions davant de la revisió del Pacte de Toledo», *Collecció Estudis Econòmics,* núm. 19, La Caixa.

JAEGER, K. (1989): «The Serendipity Theorem Reconsidered: the three-generations case without inheritance», en K. F. Zimmermann (ed.): *Economic theory of optimal population,* Springer-Verlag, 75-87.

LOUPIAS, C. y B. WIGNIOLLE (2000): «Régime de retraite et chute de la natalité: évolution des moeurs ou arbitrage micro-économique?», [mimeo.].

MICHEL, P. (1990): «Criticism of the social time-preference hypothesis in optimal growth», Documento de Trabajo 9039, CORE.

MICHEL, Ph. y P. PESTIEAU (1993): «Population growth and optimality. When does serendipity hold?», *Journal of Population Economics,* 6, 353-362, [también reimpresión de CORE Reprint núm. 1072].

MONASTERIO, C., I. SÁNCHEZ y F. BLANCO (1996): «Equidad y estabilidad del sistema español de pensiones», Serie Economía Pública, Fundación BBV.

— I. SÁNCHEZ y F. BLANCO (2000): «La reforma del sistema de pensiones: el Pacto de Toledo y su desarrollo posterior», *Hacienda Pública Española, monografía 2000: Las Pensiones en España,* 35-54.

MTSS (1995): «La Seguridad Social en el umbral del siglo XXI: estudio económico actuarial», Ministerio de Trabajo y Seguridad Social.

NERLOVE, M., A. RAZIN y E. SADKA (1987): «Household and Economy», Academic Press, Inc.

PIÑERA, M. (1996): «Una propuesta de reforma del sistema de pensiones en España», Madrid, Círculo de Empresarios.

RAMSEY, F. (1928): «A mathematical theory of savings», *Economic Journal,* 38, 543-559.

SAMUELSON, P. A. (1975): «The optimum growth rate for population», *International Economic Review,* 16, 531-538.

SINN, H-W. (2000): «Why a funded system is useful and why it is not useful», *International Tax and Public Finance,* 7, 389-410.

WIGGER, B. U. (1999): «Pay-as-you-go financed public pensions in a model of endogenous growth and fertility», *Journal of Population Economics,* 12, 625-640.

NOTA SOBRE LAS AUTORAS

GEMMA ABÍO ROIG es doctora en Economía por la Universidad de Barcelona y profesora titular interina en el departamento de Teoría Económica de la misma universidad. Es miembro del Centre d'Anàlisi Econòmica i de les Polítiques Socials (CAEPS) de la misma entidad. Ha realizado la tesis doctoral sobre la interacción entre la política de pensiones y la fecundidad, empleando modelos teóricos de generaciones solapadas con fecundidad endógena y técnicas aplicadas como la Contabilidad Generacional.

CONCEPCIÓ PATXOT CARDONER es doctora en Economía por la Universidad de Barcelona y MSc. por el Queen Mary and Westfield College (Universidad de Londres). Actualmente es profesora titular en el departamento de Teoría Económica de la Universidad de Barcelona. Es miembro del Centre d'Anàlisi Econòmica i de les Polítiques Socials (CAEPS) de la misma entidad. Su labor investigadora va dirigida al análisis del Estado del Bienestar en un entorno demográfico cambiante, tanto en el ámbito teórico de los modelos de generaciones solapadas con fecundidad endógena, como en el aplicado, empleando técnicas como la Contabilidad Generacional.

D O C U M E N T O S   D E   T R A B A J O

NÚMEROS PUBLICADOS

Documentos de Trabajo

3

Fundación BBVA

Gran Vía, 12
48001 Bilbao
Tel.: 94 487 52 52
Fax: 94 424 46 21

Paseo de Recoletos, 10
28001 Madrid
Tel.: 91 374 54 00
Fax: 91 374 85 22

informacion@fbbva.es
www.fbbva.es